

$[b,c] = [c,a]$, получаем $[b,c] = \lambda[b,c]$, т.е. $(1-\lambda)[b,c] = \vec{0}$. Векторы b и c не коллинеарны, т.е. $[b,c] \neq \vec{0}$. Следовательно,

$$\lambda = 1 \text{ и } a + b + c = \vec{0}. \blacksquare$$

Пример 8. Даны разложения векторов a и b по базису $\{e_1, e_2, e_3\}$:
 $a = a_x e_1 + a_y e_2 + a_z e_3$, $b = b_x e_1 + b_y e_2 + b_z e_3$. Разложите вектор $[a,b]$ по векторам $f_1 = [e_2, e_3]$, $f_2 = [e_3, e_1]$, $f_3 = [e_1, e_2]$.

▲ Согласно свойству линейности векторного произведения, $[a,b] = [a_x e_1 + a_y e_2 + a_z e_3, b] = a_x[e_1, b] + a_y[e_2, b] + a_z[e_3, b]$. Аналогично,

$$\begin{aligned} [e_1, b] &= [e_1, b_x e_1 + b_y e_2 + b_z e_3] = \\ &= b_x[e_1, e_1] + b_y[e_1, e_2] + b_z[e_1, e_3] = b_y f_3 - b_z f_2 \end{aligned}$$

(здесь учтено равенство $[e_1, e_1] = \vec{0}$). Так же проверяется, что $[e_2, b] = b_z f_1 - b_x f_3$, $[e_3, b] = b_x f_2 - b_y f_1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} [a,b] &= a_x(b_y f_3 - b_z f_2) + a_y(b_z f_1 - b_x f_3) + a_z(b_x f_2 - b_y f_1) = \\ &= f_1 \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - f_2 \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + f_3 \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \blacktriangledown \quad (6.4) \end{aligned}$$

§2. Площадь параллелограмма, треугольника, четырехугольника

Пусть \mathcal{P} — фиксированная плоскость в пространстве, $\{i', j'\}$ — ортонормированный (не обязательно правый) базис в плоскости \mathcal{P} , $a = a_x i' + a_y j'$ и $b = b_x i' + b_y j'$ — произвольные векторы, параллельные плоскости \mathcal{P} . Положим $k' = [i', j']$. Тогда $\{i', j', k'\}$ — правый ортонормированный базис в пространстве (свойство IV), в этом базисе

$$a = (a_x; a_y; 0), \quad b = (b_x; b_y; 0),$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = (0; 0; a_x b_y - b_x a_y).$$

Поэтому площадь S параллелограмма, лежащего в плоскости \mathcal{P} и построенного на векторах $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i}' + a_y \mathbf{j}'$ и $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i}' + b_y \mathbf{j}'$, равна

$$S = |a_x b_y - a_y b_x|. \quad (6.5)$$

В этом параграфе всюду, если не оговорено противное, считаем, что координаты векторов заданы в правом ортонормированном базисе $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ (на плоскости — в базисе $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$), а координаты точек — в соответствующей прямоугольной системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ (на плоскости — $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$).

Пример 1. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = (-1; 3)$ и $\mathbf{b} = (1; 2)$.

▲ По формуле (6.4) $S = |(-1) \cdot 2 - 3 \cdot 1| = 5$. ▼

Пример 2. Вычислите площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A(-1; 0; -1)$, $B(0; 2; -3)$, $C(4; 4; 1)$.

▲ Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{AB} и \vec{AC} :

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]| = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \right)^2 + \left(- \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right)^2}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где $a_x = 1$, $a_y = 2$, $a_z = -2$ и $b_x = 5$, $b_y = 4$, $b_z = 2$ — соответственно координаты векторов $\mathbf{a} = \vec{AB}$ и $\mathbf{b} = \vec{AC}$. Таким образом,

$$S_{ABC} = (1/2) \sqrt{12^2 + (-12)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = 9. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 3. Докажите, что площадь S треугольника, векторы сторон которого равны векторам медиан треугольника ABC (рис. 6.1, а,б), составляет $3/4$ площади σ треугольника ABC .

▲ Пусть $\mathbf{a} = \vec{CA}$, $\mathbf{b} = \vec{CB}$. Тогда $\vec{CC_1} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$, $\vec{BB_1} = \mathbf{b} - \mathbf{a}/2$, $[\vec{CC_1}, \vec{B_1B}] = [(\mathbf{a} + \mathbf{b})/2, \mathbf{b} - \mathbf{a}/2] = (3/4)[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ (см. пример 5 из §1 этой главы). Поэтому $S = (1/2)|[\vec{CC_1}, \vec{B_1B}]| = (3/4)(1/2)|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = (3/4)\sigma$. ▼

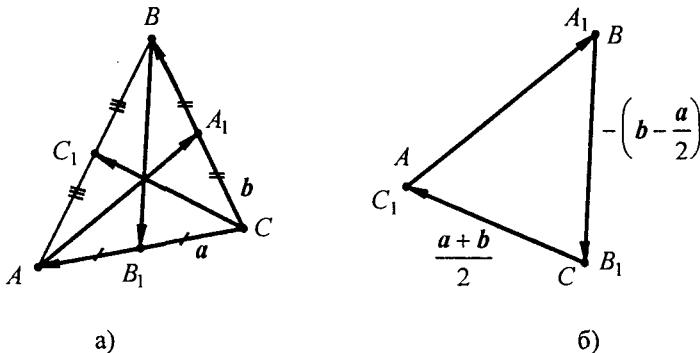


Рис. 6.1

Пример 4. Дан треугольник ABC . На прямых (AB) , (BC) , (CA) выбраны соответственно точки M , N , P так, что $\vec{AM} = \alpha \vec{AB}$, $\vec{BN} = \alpha \vec{BC}$, $\vec{CP} = \alpha \vec{CA}$. При каком значении α площадь $S(\alpha)$ треугольника, векторы сторон которого суть \vec{CM} , \vec{AN} и \vec{BP} , наименьшая?

▲ Пусть $\mathbf{a} = \vec{CA}$, $\mathbf{b} = \vec{CB}$. На основании результата примера 11 §3 гл.2 векторы \vec{CM} , \vec{AN} , \vec{BP} действительно образуют треугольник, причем $\vec{CM} = (1-\alpha)\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$, $\vec{AN} = -\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}$. Поэтому

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= (1/2)|[\vec{CM}, \vec{AN}]| = (1/2)|[(1-\alpha)\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}, -\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}]| = \\ &= (1/2)|-\alpha[\mathbf{b}, \mathbf{a}] + (1-\alpha)^2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = \\ &= (1/2)(1-\alpha + \alpha^2)|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = (1-\alpha + \alpha^2)S_{ABC}. \end{aligned}$$

Минимум этого выражения достигается при $\alpha = 1/2$, т.е. в случае, когда \vec{CM} , \vec{AN} , \vec{BP} — медианы ΔABC (пример 3). Этот минимум равен $(3/4)S_{ABC}$. ▼

Пример 5. Треугольники ABC и ACD расположены в одной плоскости так, что точки B и D лежат по разные стороны от прямой (AC) (рис. 6.2, а, б). Докажите, что площадь S четырехугольника $ABCD$ равна

$$S = \frac{1}{2} |[\vec{AC}, \vec{BD}]|. \quad (6.7)$$

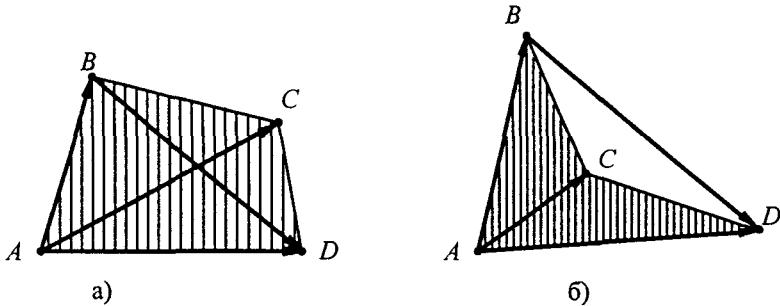


Рис. 6.2

▲ По условию задачи $\{\vec{AD}, \vec{AC}\} \sim \{\vec{AC}, \vec{AB}\}$. Поэтому векторы $[\vec{AD}, \vec{AC}]$ и $[\vec{AC}, \vec{AB}]$ сонаправлены, и, следовательно, длина суммы этих векторов равна сумме их длин:

$$\begin{aligned} |[\vec{AD}, \vec{AC}]| + |[\vec{AC}, \vec{AB}]| &= |[\vec{AD}, \vec{AC}] + [\vec{AC}, \vec{AB}]| = \\ &= |[\vec{AD}, \vec{AC}] - [\vec{AB}, \vec{AC}]| = |[\vec{AD} - \vec{AB}, \vec{AC}]| = |[\vec{BD}, \vec{AC}]|. \end{aligned}$$

Так как $|[\vec{AD}, \vec{AC}]| = 2S_{ADC}$, $|[\vec{AC}, \vec{AB}]| = 2S_{ABC}$, $S = S_{ADC} + S_{ABC}$, то

$$S = (1/2)|[\vec{BD}, \vec{AC}]| = (1/2)|[\vec{AC}, \vec{BD}]|. \quad \blacktriangleright$$

Пример 6*. Дан треугольник ABC , площадь которого равна S . На прямых (AB) , (BC) , (CA) выбраны точки M , N , P соответственно так, что $\vec{AM} = \alpha \vec{AB}$, $\vec{BN} = \beta \vec{BC}$, $\vec{CP} = \gamma \vec{CA}$, $\alpha, \beta, \gamma \neq (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$, а прямые (CM) , (BP) и (AN) попарно пересекаются:

$$D = (CM) \cap (BP), \quad E = (CM) \cap (AN), \quad F = (BP) \cap (AN).$$

Найдите площадь σ треугольника DEF .

▲ Поскольку $\alpha, \beta, \gamma \neq (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$, точки D, E, F попарно различны (рис. 6.3) (см. пример 9 §9 гл. 2). Если в качестве базисных взять векторы

$\mathbf{a} = \vec{CA}$ и $\mathbf{b} = \vec{CB}$, то $\vec{CM} = \alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}$, $\vec{AN} = -\mathbf{a} + (1-\beta)\mathbf{b}$, $\vec{BP} = \gamma\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Пусть $\vec{CE} = x\vec{CM}$, $\vec{CD} = y\vec{CM}$, $\vec{BD} = z\vec{BP}$, $\vec{BF} = u\vec{BP}$, $\vec{AF} = v\vec{AN}$, $\vec{AE} = w\vec{AN}$ (числа x , y , z , u , v , w будем искать по правилу цикла, используя единственность разложения векторов по базису $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$). Из цикла $AEC\bar{A}$ получаем

$$\begin{aligned} \vec{AE} - \vec{CE} + \vec{CA} &= \vec{0} \Leftrightarrow w(-\mathbf{a} + (1-\beta)\mathbf{b}) - x(\alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}) + \mathbf{a} = \\ &= 0 \cdot \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} -w - x(1-\alpha) + 1 = 0, \\ w(1-\beta) - x\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow w = \frac{\alpha}{1-\beta+\alpha\beta}, \quad x = \frac{1-\beta}{1-\beta+\alpha\beta} \end{aligned}$$

(здесь использовано то обстоятельство, что $1-\beta+\alpha\beta \neq 0$. Действительно, числа x и w существуют (прямые (AN) и (CM) пересекаются) и удовлетворяют соотношениям $w(1-\beta+\alpha\beta) = \alpha$, $x(1-\beta+\alpha\beta) = 1-\beta$. Если бы $1-\beta+\alpha\beta = 0$, то имели бы $\alpha = 0$, $1-\beta = 0$ и, следовательно,

$$\alpha\beta\gamma = 0 = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma),$$

что противоречит условию задачи). Аналогично находим:

$$\begin{aligned} y &= \gamma/(1-\alpha+\alpha\gamma), \quad z = (1-\alpha)/(1-\alpha+\alpha\gamma), \quad u = \beta/(1-\gamma+\beta\gamma), \\ v &= (1-\gamma)/(1-\gamma+\beta\gamma). \end{aligned}$$

Площадь

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} |[\vec{ED}, \vec{EF}]| = \frac{1}{2} |[(y-x)\vec{CM}, (v-w)\vec{AN}]| = \frac{1}{2} |y-x||v-w| |[\vec{CM}, \vec{AN}]| = \\ &= \frac{1}{2} |y-x||v-w| |[\alpha\mathbf{b} + (1-\alpha)\mathbf{a}, -\mathbf{a} + (1-\beta)\mathbf{b}]| = \\ &= \frac{1}{2} |y-x||v-w| |\alpha[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + (1-\alpha)(1-\beta)[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |y-x||v-w| |1-\beta+\alpha\beta| S. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} y-x &= \frac{\gamma(1-\beta+\alpha\beta) - (1-\beta)(1-\alpha+\alpha\gamma)}{(1-\beta+\alpha\beta)(1-\alpha+\alpha\gamma)} = \frac{\alpha\beta\gamma - (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{(1-\beta+\alpha\beta)(1-\alpha+\alpha\gamma)}, \\ v-w &= -\frac{\alpha\beta\gamma - (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{(1-\beta+\alpha\beta)(1-\gamma+\beta\gamma)}, \end{aligned}$$

окончательно имеем

$$\sigma = \frac{(\alpha\beta\gamma - (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma))^2}{|(1-\beta+\alpha\beta)(1-\gamma+\beta\gamma)(1-\alpha+\alpha\gamma)|} S. \quad \blacktriangleright$$

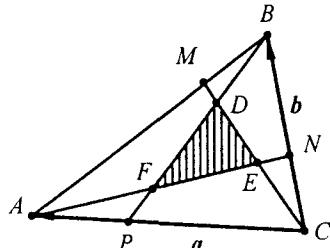


Рис. 6.3

Отметим, что если $\alpha = \beta = \gamma = k \neq 1/2$, то

$$0 < \sigma = S_{DEF} = \frac{(2k-1)^2}{k^2 - k + 1} S = \frac{4(k-1/2)^2}{(k-1/2)^2 + 3/4} S < 4S_{ABC}.$$

Пример 7. На сторонах $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ и $[DA]$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ площади S (рис. 6.4) расположены соответственно точки M , N , P , Q так, что $|AM|:|AB|=|BN|:|BC|=|CP|:|CD|=|DQ|:|DA|=\alpha$. Найдите площадь $\sigma(\alpha)$ четырехугольника $MNPQ$. При каком значении α эта площадь минимальна?

▲ По формуле (6.7) $\sigma(\alpha) = (1/2)|[\vec{MP}, \vec{NQ}]|$, где

$$\begin{aligned}\vec{MP} &= \vec{MA} + \vec{AD} + \vec{DP} = -\alpha \vec{AB} + \vec{AD} - (1-\alpha) \vec{CD} = \\ &= -\alpha \vec{AB} + \alpha \vec{AD} + (1-\alpha) \vec{AD} - (1-\alpha) \vec{CD} = \alpha \vec{BD} + (1-\alpha) \vec{AC}, \\ \vec{NQ} &= (1-\alpha) \vec{BD} - \alpha \vec{AC}, \\ [\vec{MP}, \vec{NQ}] &= [\alpha \vec{BD} + (1-\alpha) \vec{AC}, (1-\alpha) \vec{BD} - \alpha \vec{AC}] = \\ &= (2\alpha^2 - 2\alpha + 1)[\vec{AC}, \vec{BD}].\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sigma(\alpha) = (1/2)(2\alpha^2 - 2\alpha + 1)|[\vec{AC}, \vec{BD}]| = (2\alpha^2 - 2\alpha + 1)S.$$

Минимум $\sigma(\alpha)$ достигается при $\alpha = 1/2$ и равен $(1/2)S$. ▼

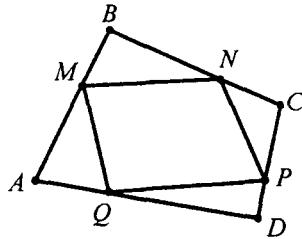


Рис. 6.4

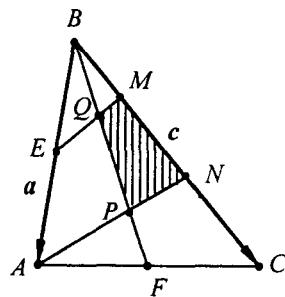


Рис. 6.5

Пример 8*. Площадь треугольника ABC равна S . Точки E и F — соответственно середины сторон $[AB]$ и $[AC]$. Точки $M \neq C$ и N лежат на стороне $[BC]$, причем $|MN| = |NC|$ (рис. 6.5). Прямые (EM) и (AN) пересекают ме-

диану $[BF]$ соответственно в точках Q и P . Докажите, что площадь σ четырехугольника $MNPQ$ удовлетворяет неравенствам $(1/6)S \leq \sigma \leq (1/5)S$. В каких случаях: а) $\sigma = (1/5)S$; б) $\sigma = (1/6)S$?

▲ Положим $\vec{BA} = \mathbf{a}$, $\vec{BC} = \mathbf{c}$, $\vec{NC} = (1/2)x\mathbf{c}$ (по условию задачи, $0 < x \leq 1$). Векторы \vec{BP} и $\vec{BF} = (1/2)(\mathbf{a} + \mathbf{c})$ сонаправлены. Поэтому существует такое число λ , что $\vec{BP} = \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{c})$. Аналогично, существует такое число α , что $\vec{AP} = \alpha \vec{AN} = \alpha(-\mathbf{a} + (1 - x/2)\mathbf{c})$. Из цикла $ABPA$ получаем

$$-\mathbf{a} + \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{c}) - \alpha(-\mathbf{a} + (1 - x/2)\mathbf{c}) = 0, \text{ т.е. } \alpha + \lambda = 1, \lambda = \alpha(1 - x/2).$$

Отсюда $\lambda = (2 - x)/(4 - x)$. Следовательно, площадь треугольника BPN есть

$$\begin{aligned} S_{BPN} &= (1/2)|[\vec{BP}, \vec{BN}]| = (1/2)|[\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{c}), (1 - x/2)\mathbf{c}]| = \\ &= (1/2)\lambda(1 - x/2)|[\mathbf{a}, \mathbf{c}]| = ((2 - x)^2 S)/(2(4 - x)). \end{aligned}$$

Аналогично, рассмотрев цикл $EBQE$, находим

$$\vec{BQ} = \frac{1-x}{3-2x}(\mathbf{a} + \mathbf{c}), \quad S_{BQM} = \frac{(1-x)^2}{3-2x}S.$$

Таким образом,

$$\frac{S_{MNPQ}}{S} = \frac{S_{BPN} - S_{BQM}}{S} = \frac{(2-x)^2}{2(4-x)} - \frac{(1-x)^2}{3-2x} = f(x).$$

Функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$, причем $f'(x) = 5(2-x)(2-3x)/[2(4-x)^2(3-2x)^2]$. Следовательно, $f'(x) > 0$ на промежутке $(0, 2/3)$, т.е. $f(x)$ монотонно возрастает на этом промежутке, и $f'(x) < 0$ на промежутке $(2/3, 1]$. Поэтому $f(x)$ достигает максимума в точке $x = 2/3$, $f(2/3) = 1/5$. Поскольку $f(0) = f(1) = 1/6$, минимум $f(x)$ на промежутке $(0, 1]$ достигается при $x = 1$. Таким образом, $\sigma = (1/5)S$, если $|BM| = |MN| = |NC|$ (в этом случае $(EM) \parallel (AN)$); $\sigma = (1/6)S$, если $M = B$. ▼

Пример 9. Докажите, что площадь трапеции $ABCD$ ($(AD) \parallel (BC)$) равна $\frac{1+k}{2}|[\vec{AB}, \vec{AD}]|$, где $k = |BC| : |AD|$.

▲ Пусть $\mathbf{a} = \vec{AD}$, $\mathbf{b} = \vec{AB}$. Тогда $\vec{BC} = k \vec{AD} = k\mathbf{a}$, $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \mathbf{b} + k\mathbf{a}$, $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ и

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{1}{2} |[\vec{AC}, \vec{BD}]| = \frac{1}{2} |[b + ka, a - b]| = \\ &= \frac{1}{2} |[b, a] - k[a, b]| = \frac{k+1}{2} |[a, b]|. \end{aligned}$$

Пример 10*. Площадь трапеции $ABCD$ равна S , отношение длин оснований $|AD|:|BC| = \frac{1}{k} = 3$. На прямой, пересекающей в точке K продолжение основания $[AD]$ за точку D , расположен отрезок $[EF]$ так, что $(AE) \parallel (DF)$, $(BE) \parallel (CF)$, $|AE|:|DF| = m = 2$, $|CF|:|BE| = n = 2$ (рис. 6.6). Найдите площадь σ треугольника EFB .

▲ Обозначим $\vec{AD} = \mathbf{a}$, $\vec{AB} = \mathbf{b}$, $\vec{DK} = x\mathbf{a}$, $x > 0$, $\vec{DF} = \mathbf{y}$, $\vec{BE} = \mathbf{z}$. Тогда $\vec{AE} = \lambda\mathbf{y}$, $|\lambda| = m$, $\vec{CF} = \mu\mathbf{z}$, $|\mu| = n$, $\vec{BC} = k\mathbf{a}$. Из цикла $ABEA$ $\mathbf{b} + \mathbf{z} - \lambda\mathbf{y} = \vec{0}$.

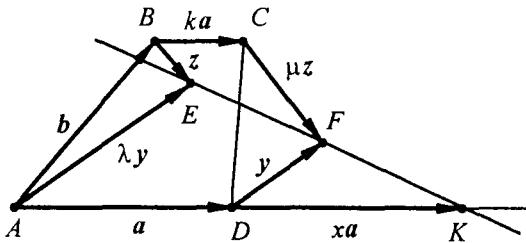


Рис. 6.6

Из цикла $ABCFDA$ $\mathbf{b} + (k-1)\mathbf{a} + \mu\mathbf{z} - \mathbf{y} = \vec{0}$. Из этой системы находим $y = ((1-\mu)\mathbf{b} + (k-1)\mathbf{a})/(1-\lambda\mu)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} |[\vec{DE}, \vec{DF}]| = \frac{1}{2} |[\lambda\mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{y}]| = \frac{1}{2} |[\mathbf{a}, \mathbf{y}]| = \\ &= \frac{1}{2|1-\lambda\mu|} |[\mathbf{a}, (1-\mu)\mathbf{b} + (k-1)\mathbf{a}]| = \frac{|1-\mu|}{2|1-\lambda\mu|} |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = \frac{|1-\mu|}{|1-\lambda\mu|} \frac{S}{k+1} \end{aligned}$$

(см. пример 9). Осталось использовать условие $x > 0$. Векторы $\vec{KF} = \mathbf{y} - x\mathbf{a}$ и $\vec{KE} = \lambda\mathbf{y} - (1+x)\mathbf{a}$ коллинеарны, т.е. $\vec{KE} = t\vec{KF}$ при некотором t : $\lambda\mathbf{y} - (1+x)\mathbf{a} = t\mathbf{y} - tx\mathbf{a}$. Векторы \mathbf{a} и \mathbf{y} не коллинеарны. Поэтому $\lambda = t$, $1+x = tx$, т.е. $\lambda(1+x)/x > 0$. Следовательно, $\lambda = m$. Таким образом, возможны два случая:

$$1) \mu = n, \text{ тогда } \sigma = \frac{|1-n|}{|1-mn|} \frac{S}{k+1} = \frac{1}{4} S;$$

$$2) \mu = -n, \text{ тогда } \sigma = \frac{1+n}{1+mn} \frac{S}{k+1} = \frac{9}{20} S. \quad \blacktriangleright$$

Пример 11*. Докажите, что все грани тетраэдра $ABCD$ равновелики тогда и только тогда, когда они являются конгруэнтными треугольниками.

□ Воспользуемся рис. 3.14 и обозначениями примера 18 §2 гл. 3. Тогда $\vec{BC} = 2\mathbf{c}$, $\vec{AD} = 2\mathbf{a}$, $\vec{BD} = \mathbf{c} - \mathbf{b} + \mathbf{a}$, $\vec{AB} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\vec{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Следовательно,

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} |[\vec{BC}, \vec{BD}]| = |[\mathbf{c}, \mathbf{c} - \mathbf{b} + \mathbf{a}]| = |[\mathbf{c}, \mathbf{a} - \mathbf{b}]|,$$

$$S_{BAD} = \frac{1}{2} |[\vec{AD}, \vec{AB}]| = |[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}]| = |[\mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{c}]|,$$

$$S_{BAC} = \frac{1}{2} |[\vec{BC}, \vec{AB}]| = |[\mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}]| = |[\mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b}]|,$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} |[\vec{AD}, \vec{AC}]| = |[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}]| = |[\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}]|.$$

На основании тождества $|[m, n]|^2 = m^2 n^2 - (m, n)^2$ равновеликость всех граней тетраэдра $ABCD$ эквивалентна системе уравнений

$$c^2(a^2 + b^2 - 2(a, b)) - ((a, c) - (b, c))^2 = c^2(a^2 + b^2 + 2(a, b)) - ((a, c) + (b, c))^2,$$

$$a^2(b^2 + c^2 - 2(b, c)) - ((a, b) - (a, c))^2 = a^2(b^2 + c^2 + 2(b, c)) - ((a, b) + (a, c))^2, \quad 6.8)$$

$$c^2(a^2 + b^2 + 2(a, b)) - ((a, c) + (b, c))^2 = a^2(b^2 + c^2 + 2(b, c)) - ((a, b) + (a, c))^2.$$

Из первых двух уравнений имеем

$$c^2(a, b) = (a, c)(b, c), \quad a^2(b, c) = (a, c)(a, b).$$

Перемножая эти соотношения, получаем $(a^2 c^2 - (a, c)^2)(a, b)(b, c) = 0$. Поскольку a и c не коллинеарны, $|a||c| > |(a, c)|$. Следовательно, $(a, b)(b, c) = 0$. Поэтому $a^2(b, c)^2 = (a, c)(a, b)(b, c) = 0$, т.е. $(b, c) = 0$. Тогда $c^2(a, b) = (a, c)(b, c) = 0$, т.е. $(a, b) = 0$. Подставляя найденные скалярные произведения в уравнение (6.8), получим $b^2(a^2 - c^2) = 0$, т.е. $|a| = |c|$. Следовательно, $|AD| = |BC|$. Вектор $\mathbf{b} = \vec{EF}$ ортогонален как $\vec{AD} = 2\mathbf{a}$, так и $\vec{BC} = 2\mathbf{c}$. На основании результата примера 18 §2 гл. 3 также имеем $|AB| = |CD|$ и $|BD| = |AC|$. Итак, длины скрещивающихся ребер тетраэдра $ABCD$ попарно равны. Значит, его грани — конгруэнтные треугольники. ■