Следовательно, в качестве $\boldsymbol{a}$ можно взять вектор $[\vec{N}_1, \vec{N}_2]$. ▼

Пример 10. Найдите угол между прямой l:

$$\begin{cases} 3x+5y+4z-1=0, \\ x+y-4=0 \end{cases}$$

и плоскостью $\mathcal{P}$: $x+z+2=0$.

▲ Направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ прямой l находим по формуле

$$\boldsymbol{a} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2], \tag{6.17}$$

где $\vec{N}_1 = (3; 5; 4)$, $\vec{N}_2 = (1; 1; 0)$ (см. пример 9). По формуле (3.53) угол φ между l и $\mathcal{P}$ равен $\varphi = \arcsin\dfrac{|(\vec{N}, \boldsymbol{a})|}{|\vec{N}||\boldsymbol{a}|}$, где

$$\vec{N} = (1; 0; 1),\ \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-4;\ 4;\ -2), \text{ т.е. } \varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ. \ ▼$$

Пример 11. Найдите угол φ между прямыми

$$l\colon \begin{cases} x+2y+2z=0, \\ x+y+2=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad L\colon \begin{cases} x-y+3z+2=0, \\ 2x-2y+z=0. \end{cases}$$

▲ По формуле (6.17) направляющие векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ прямых l и L соответственно равны $\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2; 2; -1)$, $\boldsymbol{b} = (5; 5; 0)$. Следовательно, $\cos\varphi = |(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| / (|\boldsymbol{a}|, |\boldsymbol{b}|) = 0$, $\varphi = 90^\circ$. ▼

ГЛАВА 7. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

§1. Определение и свойства смешанного произведения. Объем ориентированного параллелепипеда. Объем тетраэдра

Число $(\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}])$ называется *смешанным произведением (упорядоченной тройки) векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ (обозначение: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$).

Приведем свойства смешанного произведения векторов:

1°. *Смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда сомножители компланарны.*

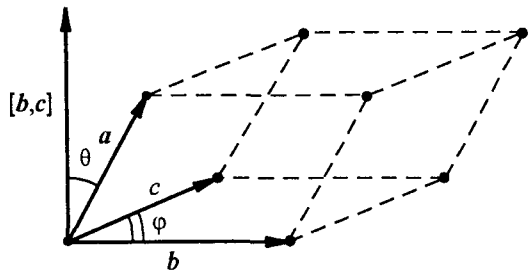

Рис. 7.1

□ Если φ — угол между векторами $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, θ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ (рис. 7.1), то

$$(\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]) = \begin{cases} 0, \text{ если } \boldsymbol{a} = \vec{0} \text{ или } [\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] = \vec{0}; \\ |\boldsymbol{a}|\,|[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]|\cos\theta = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|\sin\varphi\cos\theta, \\ \text{если } \boldsymbol{a} \neq \vec{0} \text{ и } [\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] \neq \vec{0}. \end{cases} \tag{7.1}$$

Таким образом, равенство $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = 0$ возможно лишь в следующих случаях:

а) $\boldsymbol{a} = \vec{0}$. В этом случае векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, очевидно, компланарны;

б) $[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] = \vec{0}$. В этом случае векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ коллинеарны, поэтому векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны;

в) $\boldsymbol{a} \neq \vec{0}$, $[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] \neq \vec{0}$ (т.е. $\boldsymbol{b} \neq \vec{0}$, $\boldsymbol{c} \neq \vec{0}$, $\sin\varphi \neq 0$), $\cos\theta = 0$ (см. формулу (7.1)). В этом случае $\boldsymbol{a}$ ортогонален $[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$, т.е. $\boldsymbol{a}$ параллелен плоскости, в которой $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ образуют базис.

Далее, если $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \neq 0$, то по формуле (7.1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — ненулевые векторы, $\sin\varphi \neq 0$, т.е. $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ не коллинеарны, $\cos\theta \neq 0$, следовательно, векторы $\boldsymbol{a}$ и $[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ не ортогональны и, значит, $\boldsymbol{a}$ не параллелен той плоскости, в которой $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ образуют базис. Иными словами, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ не компланарны. ■

Очевидным следствием доказанного свойства 1° является следующее утверждение: *если в смешанном произведении два сомножителя одинаковы, то оно равно нулю.*

2°. *Базис* $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ *является правым тогда и только тогда, когда* $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})>0$.

□ В соответствии с формулой (7.1) знак смешанного произведения тройки (некомпланарных) векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ совпадает со знаком $\cos\theta$, поэтому если $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})>0$, то $\cos\theta>0$ и, значит, вектор $\boldsymbol{a}$ направлен в ту же сторону от плоскости, построенной на векторах $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, что и вектор $[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ (см. рис. 7.1). Следовательно, $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\}\sim\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]\}$. В силу свойства IV векторного произведения, базис $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]\}$ является правым, поэтому правым является и одинаково ориентированный с ним базис $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\}$. Поскольку $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}\sim\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\}$ (см. пример 1 §4 гл. 4), окончательно получаем, что $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ — правый базис. Аналогично доказывается, что если $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})<0$, то $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ — левый базис. ■

Будем говорить, что параллелепипед *построен* на трех некомпланарных векторах, если три его ребра, выходящие из одной вершины, являются направленными отрезками с общим началом в этой вершине, изображающими данные векторы.

3°. *Объем параллелепипеда, построенного на некомпланарных векторах* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$, *равен модулю смешанного произведения этих векторов.*

□ По формуле (7.1) $|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\sin\varphi\cdot|\cos\theta|$, а объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, равен произведению площади основания $S=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\sin\varphi$ на высоту $h=|\boldsymbol{a}|\cdot|\cos\theta|$. Таким образом, если параллелепипед построен на некомпланарных векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ (рис. 7.1), то его объем равен $|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|$. ■

Свойства 1° — 3° смешанного произведения раскрывают его геометрический смысл: если $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$, то векторы $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ компланарны; в противном случае векторы не компланарны, и при этом знак числа $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ указывает на ориентацию упорядоченной тройки $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$, а модуль этого числа равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$.

Назовем параллелепипед *ориентированным*, если тройка векторов, на которой он построен, упорядочена. Ориентацию назовем *положительной*, если эта тройка правая, и *отрицательной* в противном случае. Принято считать объем ориентированного параллелепипеда положительным, если его ориентация положительна, и отрицательным, если ориентация отрицательна. Свойства 2° и 3° означают, что *смешанное произведение трех некомпланарных векторов равно объему ориентированного параллелепипеда, построенного на этих векторах.*

4°. *Для любых векторов* $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ *справедливы равенства*:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) = -(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}). \qquad (7.2)$$

□ Если векторы $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ компланарны, то в силу свойства 1° каждое из чисел в равенствах (7.2) равно нулю, и эти равенства справедливы. Если векторы $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ не компланарны, то в силу свойства 3° модули всех шести чисел в (7.2) равны. В соответствии с результатом примера 1 §4 гл. 4 и свойством 2° знаки этих чисел одинаковы. Следовательно, эти шесть чисел равны. ■

5°. *Смешанное произведение линейно по каждому из сомножителей*:

$$\begin{aligned}(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{d},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) &= \lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{d},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}),\\ (\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{d},\boldsymbol{c}) &= \lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{a},\boldsymbol{d},\boldsymbol{c}),\\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\lambda\boldsymbol{c}+\mu\boldsymbol{d}) &= \lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})\end{aligned} \qquad (7.3)$$

для любых векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ *и чисел* λ *и* μ.

□ Равенства (7.3) следуют из свойств линейности скалярного и векторного произведений. ■

Пример 1. Докажите, что объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}$ модуля смешанного произведения любых трех некомпланарных векторов, образующих ребра тетраэдра.

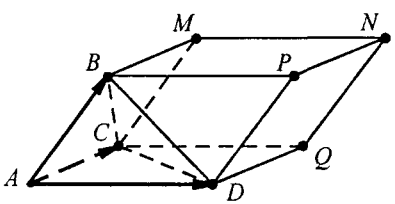

Рис. 7.2

□ Достроив тетраэдр $ABCD$ до параллелепипеда $ACQDBMNP$ (рис. 7.2), получим

$$V_{ABCD} = (1/3)hS_{ACD},$$

где h — длина высоты, опущенной из вершины B на плоскость (ACD),

$$S_{ACD} = (1/2)S_{ACQD}$$

— площадь треугольника ACD. Таким образом, $V_{ABCD} = (1/6)hS_{ACQD} = (1/6)V_{ACQDBMNP} = (1/6)|(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})|$. Кроме того, $(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}) = (\vec{DB},\vec{AC},\vec{AD}) = (\vec{CB},\vec{AC},\vec{AD})$. Действительно,

$$(\vec{DB},\vec{AC},\vec{AD}) = (\vec{AB}-\vec{AD},\vec{AC},\vec{AD}) =$$

$$= (\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}) - (\vec{AD},\vec{AC},\vec{AD}) = (\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})$$

(векторы $\vec{AD}, \vec{AC}, \vec{AD}$ компланарны, и их смешанное произведение равно нулю). Аналогично,

$$(\vec{CB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = (\vec{AB} - \vec{AC}, \vec{AC}, \vec{AD}) =$$

$$= (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) - (\vec{AC}, \vec{AC}, \vec{AD}) = (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}). \blacksquare$$

Пример 2. Докажите, что объем тетраэдра $ABCD$ может быть вычислен по формуле

$$V = \frac{1}{6}|AD| \cdot |BC| \cdot d \sin\varphi,$$

где φ — угол между прямыми (AD) и (BC), а d — расстояние между этими прямыми.

▲ Объем V тетраэдра $ABCD$ равен $V = (1/6)|(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{BC})|$ (см. пример 1). Пусть $M \in (AD)$ и $N \in (BC)$ — точки пересечения общего перпендикуляра к прямым (AD) и (BC) с этими прямыми. Тогда $d = |\vec{MN}|$, а вектор $\vec{MN}$, будучи ортогонален $\vec{AD}$ и $\vec{BC}$, коллинеарен векторному произведению $[\vec{AD}, \vec{BC}]$. Пусть λ и μ — такие числа, что $\vec{AM} = \lambda \vec{AD}$, $\vec{BN} = \mu \vec{BC}$. Тогда $\vec{AB} = \lambda \vec{AD} + \vec{MN} - \mu \vec{BC}$ и

$$(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{BC}) = \lambda(\vec{AD}, \vec{AD}, \vec{BC}) + (\vec{MN}, \vec{AD}, \vec{BC}) - \mu(\vec{BC}, \vec{AD}, \vec{BC}) =$$

$$= (\vec{MN}, [\vec{AD}, \vec{BC}]).$$

Следовательно, $V = \frac{1}{6}|(\vec{MN}, [\vec{AD}, \vec{BC}])| = \frac{1}{6} d \cdot |[\vec{AD}, \vec{BC}]|$ (векторы $[\vec{AD}, \vec{BC}]$ и $\vec{MN}$ коллинеарны). Так как $|[\vec{AD}, \vec{BC}]| = |AD| \cdot |BC| \sin\varphi$, то

$$V = \frac{1}{6}|AD| \cdot |BC| \cdot d \sin\varphi. \blacktriangledown$$

Пример 3. Дан тетраэдр, определяемый двумя отрезками, которые принадлежат скрещивающимся прямым. Докажите, что объем тетраэдра не изменится, если сдвинуть эти отрезки, не меняя их длин, вдоль соответствующих прямых.

▲ Пусть l и L — скрещивающиеся прямые (рис. 7.3), M, N, M', N' — точки прямой l, P, Q, P', Q' — точки прямой L такие, что $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{Q'P'} = \boldsymbol{b}$. Тогда (см. пример 1)

$$V_{MNPQ} = \frac{1}{6}|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\overrightarrow{QN})|, \quad V_{M'N'P'Q'} = \frac{1}{6}|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\overrightarrow{Q'N'})|.$$

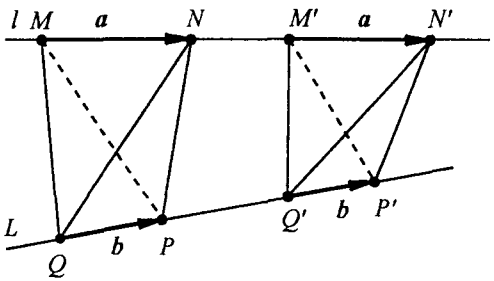

Рис. 7.3

Поскольку $\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{Q'N'} + \overrightarrow{N'N} = \lambda\boldsymbol{b} + \overrightarrow{Q'N'} + \mu\boldsymbol{a}$ (векторы $\overrightarrow{QQ'}$ и $\overrightarrow{QP} = \boldsymbol{b}$ коллинеарны, поэтому найдется такое число λ, что $\overrightarrow{QQ'} = \lambda\boldsymbol{b}$; аналогично, $\overrightarrow{N'N} = \mu\boldsymbol{a}$ с некоторым коэффициентом μ), имеем:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\overrightarrow{QN}) = \lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\overrightarrow{Q'N'}) + \mu(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}).$$

Первое и третье слагаемые в правой части этого равенства равны нулю согласно свойству 1°. Следовательно, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\overrightarrow{QN}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\overrightarrow{Q'N'})$ и, значит,

$$V_{MNPQ} = V_{M'N'P'Q'}. \ ▼$$

Пример 4. Докажите, что если $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}] = \vec{0}$, то векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны.

▲ Умножая данное равенство скалярно на вектор $\boldsymbol{a}$, получаем $0 = (\boldsymbol{a},[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]) + (\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]) + (\boldsymbol{a},[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}])$. Так как $(\boldsymbol{a},[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]) = (\boldsymbol{a},[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]) = 0$, то $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = 0$. Согласно свойству 1° смешанного произведения, векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны. ▼

Пример 5. Докажите, что если векторы $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]$ компланарны, то они коллинеарны.

▲ Пусть векторы $[a,b]$, $[b,c]$, $[c,a]$ компланарны. Тогда они линейно зависимы, т.е. существуют числа x, y, z, не равные нулю одновременно $(x^2+y^2+z^2>0)$, такие, что

$$x[a,b]+y[b,c]+z[c,a]=\vec{0}.$$

Умножая это равенство скалярно последовательно на a, b и c, получаем: $y(a,b,c)=0$, $z(a,b,c)=0$, $x(a,b,c)=0$. Отсюда $(x^2+y^2+z^2)(a,b,c)^2=0$. Следовательно, $(a,b,c)=0$. Векторы a, b и c компланарны (параллельны одной плоскости $\mathcal{P}$). Каждый из векторов $[a,b]$, $[b,c]$, $[c,a]$ (согласно свойствам I и III векторного произведения) либо нулевой, либо параллелен прямой, перпендикулярной плоскости $\mathcal{P}$. Следовательно, эти три вектора коллинеарны. ▼

Пример 6. Докажите тождество

$$[[a,b],[c,d]]=c(a,b,d)-d(a,b,c). \qquad (7.4)$$

▲ По формуле ДВП (6.9), учитывая свойство 4° смешанного произведения, имеем

$$[[a,b],[c,d]]=c([a,b],d)-d([a,b],c)=c(d,a,b)-d(c,a,b)=$$
$$=c(a,b,d)-d(a,b,c). \text{ ▼}$$

Пример 7. Докажите, что

$$([a,b],[b,c],[c,a])=(a,b,c)^2. \qquad (7.5)$$

□ По формуле (7.4) $[[b,c],[c,a]]=c(b,c,a)-a(b,c,c)=c(b,c,a)=$ $=(a,b,c)\,c$. Следовательно, $([a,b],[b,c],[c,a])=([a,b],(a,b,c)\,c)=$ $=(a,b,c)([a,b],c)=(a,b,c)(c,a,b)=(a,b,c)^2$. ■

Формулы (7.5) и (7.4) позволяют получить второе решение примера 5. Именно: если векторы $[a,b]$, $[b,c]$, $[c,a]$ компланарны, то их смешанное произведение равно нулю. Следовательно, в силу (7.5) $(a,b,c)=0$. Тогда по формуле (7.4) имеем

$$[[a,b],[c,a]]=c(a,b,a)-a(a,b,c)=$$
$$=-a(a,b,c)=-a\cdot 0=\vec{0},$$

т.е. векторы $[a,b]$ и $[c,a]$ коллинеарны. Аналогично проверяется, что и $[[a,b],[b,c]]=[[b,c],[c,a]]=\vec{0}$.

Пример 8. Докажите тождество

$$(a,b,c)\,d=(d,b,c)\,a+(a,d,c)\,b+(a,b,d)\,c.$$

▲ Рассмотрим вектор $\boldsymbol{m} = [[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]]$. По формуле (7.4), $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$. Вектор $\boldsymbol{m}$ можно записать также в виде $\boldsymbol{m} = -[[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}],[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]] = [[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}],[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{b})$ (учтено еще раз соотношение (7.4)). Таким образом,

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{m} = -\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{d},\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{d},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}),$$

откуда и следует доказываемое тождество. ▼

Пример 9. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ — радиус-векторы четырех точек пространства A, B, C, D относительно некоторого полюса O. Докажите, что эти четыре точки лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}).$$

▲ Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = 0$, т.е. $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}) = 0$. Согласно свойству линейности смешанного произведения, получаем, учитывая свойство 4°,

$$0 = (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}) =$$
$$= (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}) -$$
$$- (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) =$$
$$= (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}) - ((\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})).$$ ▼

Пример 10. Даны векторы $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{DA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{DB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{DC}$ трех ребер тетраэдра $ABCD$, выходящих из вершины D. Найдите вектор $\overrightarrow{DH}$ высоты тетраэдра, опущенной из вершины D на плоскость (ABC).

▲ Вектор $\overrightarrow{BH}$ компланарен неколлинеарным векторам $\overrightarrow{BA} = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ и $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$. Следовательно, найдутся такие числа λ и μ, что $\overrightarrow{BH} = \lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) + \mu(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$. Вектор $\overrightarrow{DH}$ перпендикулярен плоскости (ABC), т.е. коллинеарен вектору $\boldsymbol{d} = [\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}] = [\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]$. Следовательно, существует такое число ν, что $\overrightarrow{DH} = \nu\boldsymbol{d}$. Из цикла $DHBD$ имеем $\overrightarrow{DH} - \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{0}$, т.е. $\nu([\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]) = \lambda\boldsymbol{a} + (1-\lambda-\mu)\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{c}$. Умножая обе части этого равенства скалярно на вектор $\boldsymbol{d}$, получим $\nu|\boldsymbol{d}|^2 =$

$=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$, т.е. $\nu=\dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{d}|^2}$. Таким образом,

$$\overrightarrow{DH}=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{|[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]+[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]|^2}([\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]+[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]).\ ▼$$

Пример 11. Докажите, что отрезок $[AB]$, концы A и B которого расположены на разных гранях данного двугранного угла, тогда и только тогда образует с этими гранями равные углы, когда концы отрезка равноудалены от ребра двугранного угла.

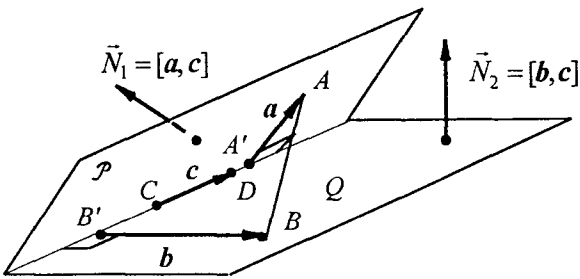

Рис. 7.4

▲ Пусть $\mathcal{P}$ и Q — грани двугранного угла (рис. 7.4), $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ — их нормальные векторы, $A\in\mathcal{P}$, $B\in Q$; C и D — две различные точки на ребре двугранного угла, A' и B' — основания перпендикуляров, опущенных соответственно из точек A и B на прямую (CD). Векторы $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{A'A}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{B'B}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CD}$ образуют базис, причем $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$. В качестве нормальных векторов $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ можно взять векторы $\vec{N}_1=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]$, $|\vec{N}_1|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|$ и $\vec{N}_2=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$, $|\vec{N}_2|=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$. По формуле (3.53) углы, образованные отрезком $[AB]$ с гранями $\mathcal{P}$ и Q, равны тогда и только тогда, когда $\dfrac{|(\vec{N}_1,\overrightarrow{AB})|}{|\vec{N}_1||\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{|(\vec{N}_2,\overrightarrow{AB})|}{|\vec{N}_2||\overrightarrow{AB}|}$, или $\dfrac{|(\overrightarrow{AB},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})|}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{|(\overrightarrow{AB},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|}{|\boldsymbol{b}|}$.

Раскладывая вектор $\overrightarrow{AB}$ по базису $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$: $\overrightarrow{AB}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{c}$ (λ неизвестно), получаем согласно свойствам 5°, 4° смешанного произведения

$$(\overrightarrow{AB},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+\lambda(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}),$$

$$(\overrightarrow{AB},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}).$$

Следовательно, углы, образованные $[AB]$ с гранями $\mathcal{P}$ и Q, равны тогда и только тогда, когда $1/|\boldsymbol{a}| = 1/|\boldsymbol{b}|$, т.е. $|AA'| = |BB'|$. ▼

Пример 12* (теорема косинусов для трехгранного угла). Плоские углы $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$ (рис. 7.5) трехгранного угла $OABC$ соответственно равны α, β, γ. Докажите, что величина $\hat{B}$ двугранного угла при ребре $[OB)$ удовлетворяет соотношению

$$\cos\hat{B} = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}. \tag{7.6}$$

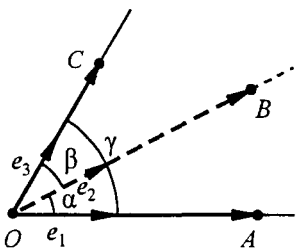

Рис. 7.5

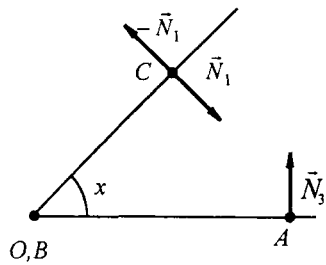

Рис. 7.6

□ Рассмотрим единичные векторы

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}.$$

Тогда $\vec{N}_1 = [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ $(|\vec{N}_1| = |\boldsymbol{e}_2||\boldsymbol{e}_3|\sin\beta = \sin\beta)$, $\vec{N}_2 = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ $(|\vec{N}_2| = \sin\alpha)$ — нормальные векторы плоскостей (COB) и (AOB) соответственно (рис. 7.6 — на этом рисунке изображена проекция искомого двугранного угла при ребре $[OB)$ на плоскость, ортогональную (OB)). Согласно свойствам углов с соответственно перпендикулярными сторонами, имеем

$$\cos\hat{B} = \cos(180° - (\widehat{\vec{N}_1, \vec{N}_2})) = -\frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1|\cdot|\vec{N}_2|} = -\frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Для вычисления скалярного произведения $(\vec{N}_1, \vec{N}_2)$ воспользуемся тем, что по формуле двойного векторного произведения имеем $[\boldsymbol{e}_2, \vec{N}_1] = [\boldsymbol{e}_2, [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]] = \boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) - \boldsymbol{e}_3(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)$, и, следовательно,

$$(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = (\vec{N}_1, e_1, e_2) = (e_1, e_2, \vec{N}_1) = (e_1, [e_2, \vec{N}_1]) =$$
$$= (e_1, e_2)(e_2, e_3) - (e_1, e_3)|e_2|^2 = \cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma.$$

Таким образом,

$$\cos\hat{B} = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}. \blacksquare$$

Пример 13*. Докажите, что: а) всякий плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух остальных; б) сумма плоских углов трехгранного угла меньше 360°.

▲ а) Воспользуемся обозначениями примера 12*. Поскольку $0° < \alpha < 180°$, $0° < \beta < 180°$, $0° < \hat{B} < 180°$, из формулы (7.6) следует, что $\cos\gamma = \cos(\alpha+\beta) + (1+\cos\hat{B})\sin\alpha\sin\beta > \cos(\alpha+\beta)$. Так как косинус на отрезке $[0°, 180°]$ монотонно убывает, а $0° < \gamma < 180°$, то из неравенства $\cos\gamma > \cos(\alpha+\beta)$ вытекает, что $\gamma < \alpha+\beta$, если $0° < \alpha+\beta \le 180°$. Если же $\alpha+\beta > 180°$, то неравенство $\alpha+\beta > \gamma$ очевидно, ибо $180° > \gamma$.

б) Используя полученное неравенство

$$0 < \cos\gamma - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

и то обстоятельство, что, по доказанному, $0° < \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} < \frac{\alpha+\beta}{2} < 180°$, т.е. $\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} > 0$, получаем $\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} > 0$. Так как $0° < \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) < 270°$, то отсюда следует, что $0° < \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) < 180°$, т.е. $\alpha+\beta+\gamma < 360°$. ▼

§2. Выражение смешанного произведения через компоненты сомножителей. Условие компланарности трех векторов. Координатное уравнение плоскости

Пусть $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ — *правый ортонормированный* базис и пусть в этом базисе $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\boldsymbol{b} = (b_x; b_y; b_z)$, $\boldsymbol{c} = (c_x; c_y; c_z)$. Покажем, что справедливо равенство

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (7.7)$$