$$(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = (\vec{N}_1, e_1, e_2) = (e_1, e_2, \vec{N}_1) = (e_1, [e_2, \vec{N}_1]) =$$
$$= (e_1, e_2)(e_2, e_3) - (e_1, e_3)|e_2|^2 = \cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma.$$

Таким образом,

$$\cos\hat{B} = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}. \blacksquare$$

Пример 13*. Докажите, что: а) всякий плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух остальных; б) сумма плоских углов трехгранного угла меньше 360°.

▲ а) Воспользуемся обозначениями примера 12*. Поскольку $0° < \alpha < 180°$, $0° < \beta < 180°$, $0° < \hat{B} < 180°$, из формулы (7.6) следует, что $\cos\gamma = \cos(\alpha+\beta) + (1+\cos\hat{B})\sin\alpha\sin\beta > \cos(\alpha+\beta)$. Так как косинус на отрезке $[0°, 180°]$ монотонно убывает, а $0° < \gamma < 180°$, то из неравенства $\cos\gamma > \cos(\alpha+\beta)$ вытекает, что $\gamma < \alpha+\beta$, если $0° < \alpha+\beta \le 180°$. Если же $\alpha+\beta > 180°$, то неравенство $\alpha+\beta > \gamma$ очевидно, ибо $180° > \gamma$.

б) Используя полученное неравенство

$$0 < \cos\gamma - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

и то обстоятельство, что, по доказанному, $0° < \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} < \frac{\alpha+\beta}{2} < 180°$, т.е. $\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} > 0$, получаем $\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} > 0$. Так как $0° < \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) < 270°$, то отсюда следует, что $0° < \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) < 180°$, т.е. $\alpha+\beta+\gamma < 360°$. ▼

§2. Выражение смешанного произведения через компоненты сомножителей. Условие компланарности трех векторов. Координатное уравнение плоскости

Пусть $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ — *правый ортонормированный* базис и пусть в этом базисе $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\boldsymbol{b} = (b_x; b_y; b_z)$, $\boldsymbol{c} = (c_x; c_y; c_z)$. Покажем, что справедливо равенство

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (7.7)$$

□ По формуле (6.1) вектор $[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ равен

$$[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix};\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}\right).$$

Поэтому

$$(\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}])=a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \blacksquare$$

Отметим, что из формулы (7.7) и критерия компланарности векторов (см. пример 20 §5 гл. 2) свойство 1° смешанного произведения вытекает тривиально. Очевидным следствием (7.7) является и свойство 2°. Действительно, по формуле (7.7) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\det S^T=\det S$, где S — матрица перехода от правого базиса $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ к базису $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$. Равенства (7.2) (свойство 4°) также немедленно следуют из формулы (7.7) и свойства 2° определителей (см. §4 гл. 2).

Получим формулу, позволяющую выразить смешанное произведение через компоненты сомножителей в произвольном базисе. Пусть в базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ $\boldsymbol{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x;b_y;b_z)$, $\boldsymbol{c}=(c_x;c_y;c_z)$. Покажем, что тогда

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3). \tag{7.8}$$

□ В соответствии с формулой (6.4)

$$[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}\boldsymbol{f}_1-\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}\boldsymbol{f}_2+\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}\boldsymbol{f}_3,$$

где $\boldsymbol{f}_1=[\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$, $\boldsymbol{f}_2=[\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1]$, $\boldsymbol{f}_3=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$. Поскольку $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{f}_1)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$, $(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{f}_1)=(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{f}_1)=0$ (вектор $\boldsymbol{f}_1$ ортогонален как $\boldsymbol{e}_2$, так и $\boldsymbol{e}_3$), $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{f}_1)=$ $=(a_x\boldsymbol{e}_1+a_y\boldsymbol{e}_2+a_z\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{f}_1)=a_x(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$. Аналогично, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{f}_2)=a_y(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{f}_3)=$ $=a_z(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$. Следовательно,

$$(\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}])=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\left(a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}\right)=$$

$$= (e_1, e_2, e_3)\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \blacksquare$$

Если $\{e_1, e_2, e_3\}$ — правый ортонормированный базис, то $(e_1, e_2, e_3) = 1$, и равенство (7.8) переходит в равенство (7.7). Далее в этом параграфе, если не оговорено противное, считаем, что координаты векторов заданы в некотором правом ортонормированном базисе, а координаты точек — в соответствующей прямоугольной системе координат.

Пример 1. Вычислите объем V параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, зная его вершину $A(1; 2; 3)$ и концы выходящих из нее ребер $B(9; 6; 4)$, $D(3; 0; 4)$, $A'(5; 2; 6)$.

▲ Имеем по свойству 3° смешанного произведения и формуле (7.7):

$$V = |(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA'})| = \left|\begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}\right| = 48. \blacktriangledown$$

Пример 2. В условиях предыдущего примера найдите длину h высоты параллелепипеда, опущенной на основание $ABCD$ из вершины A'.

▲ Площадь основания $ABCD$ равна $S = |[\vec{AB}, \vec{AD}]|$. Имеем

$$[\vec{AB}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (6; -6; -24),$$

поэтому $S = 6\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = 6\sqrt{18} = 18\sqrt{2}$. Следовательно, $h = V / S = 4\sqrt{2}/3$. ▼

Пример 3. Даны вершины тетраэдра $A(0; 0; 2)$, $B(3; 0; 5)$, $C(1; 1; 0)$, $D(4; 1; 2)$. Найдите его объем и длину высоты, опущенной из вершины D.

▲ Имеем (см. пример 1 §1 этой главы):

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}|(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|, \quad h = \frac{|(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|}{|[\vec{AB}, \vec{AC}]|}.$$

Так как $\vec{AB} = (3; 0; 3)$, $\vec{AC} = (1; 1; -2)$, то

$$[\vec{AB},\vec{AC}]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(-3;\ 9;\ 3) \text{ и } |[\vec{AB},\vec{AC}]|=3\sqrt{11}.$$

Далее, $\vec{AD}=(4;1;0)$,

$$(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})=(\vec{AD},[\vec{AB},\vec{AC}])=4\cdot(-3)+1\cdot 9+0\cdot 3=-3.$$

Следовательно, $V_{ABCD}=\dfrac{1}{2}$, $h=\dfrac{1}{\sqrt{11}}$. ▼

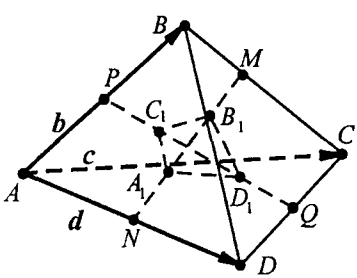

Рис. 7.7

Пример 4. В тетраэдре $ABCD$ точки M, N, P, Q лежат соответственно на ребрах $[BC]$, $[AD]$, $[AB]$, $[CD]$, причем

$$|AP|=|PB|,\ |AN|=|ND|,$$
$$|CQ|=|QD|,\ |MC|=2|BM|.$$

Пары точек A_1, B_1 и C_1, D_1 выбраны соответственно на отрезках $[NM]$ и $[PQ]$ так, что $|NA_1|=|A_1B_1|=|B_1M|$, $|PC_1|=|C_1D_1|=|D_1Q|$. Найдите отношение объемов тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

▲ Введем базис $\boldsymbol{b}=\vec{AB}$, $\boldsymbol{c}=\vec{AC}$, $\boldsymbol{d}=\vec{AD}$ (рис. 7.7). В этом базисе

$$\vec{C_1D_1}=(1/3)\vec{PQ}=(1/3)(\vec{PA}+\vec{AQ})=(1/3)(-(1/2)\boldsymbol{b}+(1/2)(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}))=$$
$$=(1/6)(-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}),$$

$$\vec{A_1B_1}=(1/3)\vec{NM}=(1/3)(\vec{NA}+\vec{AB}+(1/3)\vec{BC})=$$
$$=(1/3)(-(1/2)\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}+(1/3)(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}))=(2/9)\boldsymbol{b}+(1/9)\boldsymbol{c}-(1/6)\boldsymbol{d}.$$

Кроме того, $\vec{AC_1}=\vec{AP}+\vec{C_1D_1}=(1/3)\boldsymbol{b}+(1/6)\boldsymbol{c}+(1/6)\boldsymbol{d}$, $\vec{AA_1}=\vec{AN}+\vec{A_1B_1}=$ $=(2/9)\boldsymbol{b}+(1/9)\boldsymbol{c}+(1/3)\boldsymbol{d}$. Следовательно, $\vec{C_1A_1}=-(1/9)\boldsymbol{b}-(1/18)\boldsymbol{c}+$ $+(1/6)\boldsymbol{d}$. Объем тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ равен

$$\frac{1}{6}|(\vec{A_1B_1},\vec{C_1D_1},\vec{C_1A_1})|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 2/9 & 1/9 & -1/6 \\ -1/6 & 1/6 & 1/6 \\ -1/9 & -1/18 & 1/6 \end{vmatrix}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\right|=$$

$$=\frac{1}{216}\cdot\frac{1}{6}|(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})|=\frac{V_{ABCD}}{216}. \blacktriangledown$$

Пример 5*. Дан тетраэдр $ABCD$. На ребрах $[AB]$, $[CD]$ и продолжении ребра $[AC]$ за точку C выбраны соответственно точки M, N, P так, что $|AM|:|AB|=\lambda$, $|CN|:|CD|=\mu$, $|PC|:|CA|=\nu$. Определите объем той отсекаемой плоскостью (MNP) от тетраэдра части, которая содержит точку A. Объем тетраэдра $ABCD$ равен V.

▲ Пусть Q и R — точки пересечения плоскости (MNP) с прямыми (BC) и (DA) (рис. 7.8).

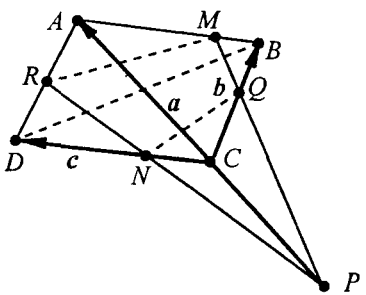

Рис. 7.8

Объем многогранника $RAMQCN$ равен V_1-V_2, где $V_1=\frac{1}{6}|(\vec{PA},\vec{PM},\vec{PR})|$ и $V_2=\frac{1}{6}|(\vec{PC},\vec{PQ},\vec{PN})|$ — соответственно объемы тетраэдров $PRAM$ и $PNCQ$. Вычислим векторы, входящие в выражения для объемов. Обозначим $\vec{CA}=\boldsymbol{a}$, $\vec{CB}=\boldsymbol{b}$, $\vec{CD}=\boldsymbol{c}$. Тогда $V=(1/6)|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|$. Имеем $\vec{PM}=(\nu+1)\boldsymbol{a}+\lambda(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$. Пусть $\vec{PQ}=x\vec{PM}$, $\vec{CQ}=y\boldsymbol{b}$. Найдем x и y, используя цикл $PCQP$: $\vec{0}=\vec{PC}+\vec{CQ}-\vec{PQ}=\nu\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}-x((\nu+1-\lambda)\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})$. В силу единственности разложения по базису $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ $y=x\lambda$, $\nu=x(\nu+1-\lambda)$. Следовательно, $x=\nu/(1+\nu-\lambda)$. Пусть $\vec{PR}=z\vec{PN}$, $\vec{RA}=w\vec{DA}$. Неизвестные числа z и w находим, используя цикл $PRAP$: $\vec{0}=\vec{PR}+\vec{RA}-\vec{PA}=z(\vec{PC}+\vec{CN})+w(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})-\vec{PA}=(z\nu+w-\nu-1)\boldsymbol{a}+(z\mu-w)\boldsymbol{c}$. Отсюда $z\nu+w-\nu-1=0$, $z\mu-w=0$. Сложив оба равенства, получим $z=(\nu+1)/(\mu+\nu)$. Таким образом, окончательно

$$V_1 = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} \nu+1 & 0 & 0 \\ \nu+1-\lambda & \lambda & 0 \\ z\nu & 0 & z\mu \end{vmatrix}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\right| = (\nu+1)\lambda z\mu V = \frac{(\nu+1)^2\lambda\mu}{\mu+\nu}V;$$

$$V_2 = \frac{1}{6}\left|\left(\frac{\nu}{1+\nu}\overrightarrow{PA}, x\overrightarrow{PM}, \frac{1}{z}\overrightarrow{PR}\right)\right| = \frac{\nu x}{z(\nu+1)}V_1;$$

$$V_1 - V_2 = \left(1 - \frac{\nu x}{z(\nu+1)}\right)\frac{(\nu+1)^2\lambda\mu}{\mu+\nu}V = \left(1 - \frac{\nu^2(\mu+\nu)}{(\nu+1)^2(1+\nu-\lambda)}\right)\frac{(\nu+1)^2\lambda\mu}{\mu+\nu}V.$$

Отметим замечательный частный случай получившейся формулы:

$$\lambda = \mu = 1/2$$

(плоскость (MNP) проходит через середины скрещивающихся ребер тетраэдра). В этом случае (независимо от величины ν) $V_1 - V_2 = (1/2)V$, т.е. *плоскость, проходящая через середины скрещивающихся ребер тетраэдра, делит этот тетраэдр на две равновеликие (одинаковые по объему) части.* ▼

Из формулы (7.8) вытекает необходимое и достаточное условие компланарности векторов $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\boldsymbol{b} = (b_x; b_y; b_z)$ и $\boldsymbol{c} = (c_x; c_y; c_z)$, заданных своими координатами в произвольном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Действительно, в силу свойства 1° смешанного произведения, векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = 0$, т.е., в силу (7.8), когда выполняется условие

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Это условие уже было получено ранее с помощью теоремы о нетривиальном решении однородной системы уравнений (см. пример 20 §5 гл. 2). Напомним, что из условия компланарности в произвольной декартовой системе координат выводится *координатное уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_1(x_1; y_1; z_1)$ *и параллельной векторам* $\boldsymbol{b} = (b_x; b_y; b_z)$ и $\boldsymbol{c} = (c_x; c_y; c_z)$ (см. формулу (2.50) из примера 11 §6 гл. 2):

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0,$$

а также *координатное уравнение плоскости, проходящей через три данные точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$ (см. формулу (2.51)):

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

§3. Взаимный базис

Пример 1. Векторы e_1, e_2, e_3 не компланарны. Докажите, что векторы $f_1 = [e_2, e_3]$, $f_2 = [e_3, e_1]$, $f_3 = [e_1, e_2]$ в указанном порядке образуют правый базис.

▲ По формуле (7.5) $(f_1, f_2, f_3) = (e_1, e_2, e_3)^2$. Поскольку $\{e_1, e_2, e_3\}$ — базис, $(e_1, e_2, e_3)^2 > 0$. Следовательно, согласно свойству 2° смешанного произведения, $\{f_1, f_2, f_3\}$ — правый базис. ▼

Построенный по базису $\{e_1, e_2, e_3\}$ базис $\{e_1', e_2', e_3'\}$, где

$$e_1' = \frac{[e_2, e_3]}{(e_1, e_2, e_3)}, \quad e_2' = \frac{[e_3, e_1]}{(e_1, e_2, e_3)}, \quad e_3' = \frac{[e_1, e_2]}{(e_1, e_2, e_3)}, \tag{7.9}$$

называется базисом, *взаимным* базису $\{e_1, e_2, e_3\}$. Из свойств смешанного произведения следует, что для всех $i, j = 1, 2, 3$

$$(e_i, e_j') = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j; \\ 1, & \text{при } i = j. \end{cases} \tag{7.10}$$

Нетрудно проверить, что каждый ортонормированный базис совпадает со своим взаимным.

По формуле (7.5)

$$(e_1', e_2', e_3') = \frac{1}{(e_1, e_2, e_3)}. \tag{7.11}$$

Пример 2. Пусть $\{e_1', e_2', e_3'\}$ — базис, взаимный базису $\{e_1, e_2, e_3\}$. Докажите, что базис $\{e_1'', e_2'', e_3''\}$, взаимный базису $\{e_1', e_2', e_3'\}$, совпадает с базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$, т.е. $e_i'' = e_i$ для каждого $i = 1, 2, 3$.

▲ По формулам (7.9) и (6.3) имеем

$$[e_2', e_3'] = \left[\frac{[e_3, e_1]}{(e_1, e_2, e_3)}, \frac{[e_1, e_2]}{(e_1, e_2, e_3)}\right] = \frac{1}{(e_1, e_2, e_3)^2}[[e_3, e_1], [e_1, e_2]].$$