$$m = \frac{6(2\sqrt{2} - \sqrt{3})}{5}. \blacktriangledown$$

Читателю будет полезно самостоятельно решить задачу из примера 14 §9 гл. 2 с помощью указанного комбинированного метода.

§4. Векторные задачи на прямую и плоскость

Пример 1. Напишите параметрическое векторное уравнение прямой l, заданной как линия пересечения двух непараллельных плоскостей $\mathcal{P}_1$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}_1) = D_1$ и $\mathcal{P}_2$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}_2) = D_2$.

▲ Первое решение. Вектор $\boldsymbol{r}$ тогда и только тогда является радиус-вектором точки прямой l, когда

$$(\boldsymbol{r}, \vec{N}_1) = D_1, (\boldsymbol{r}, \vec{N}_2) = D_2, \ \vec{N}_1(\boldsymbol{r}, \vec{N}_2) - \vec{N}_2(\boldsymbol{r}, \vec{N}_1) = D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2$$

(в этой системе уравнений третье уравнение есть очевидное следствие первых двух). Используя формулу двойного векторного произведения, перепишем это третье уравнение в виде

$$[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \vec{M}, \tag{7.19}$$

где $\boldsymbol{a} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2]$, $\vec{M} = D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2$. Уравнение (7.19) является векторным уравнением некоторой прямой l^* (см. пример 3 §3 главы 6), полностью определяющим эту прямую. Уравнению (7.19) удовлетворяют все радиус-векторы точек прямой l. Следовательно, $l \subset l^*$, т.е. $l = l^*$, а (7.19) — векторное уравнение l. Запишем это уравнение в соответствии с формулой (6.13) в параметрическом виде:

$$\boldsymbol{r} = \frac{[[\vec{N}_1, \vec{N}_2], D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2]}{|[\vec{N}_1, \vec{N}_2]|^2} + [\vec{N}_1, \vec{N}_2]\cdot t, \ t \in \mathbf{R}. \tag{7.20}$$

Второе решение. Прямая l, находясь в плоскостях $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, перпендикулярна как вектору $\vec{N}_1$, так и вектору $\vec{N}_2$. Следовательно (см. пример 9 §3 главы 6), вектор $\boldsymbol{a} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2]$ — направляющий вектор l. Вектор $\boldsymbol{r}_0$ (радиус-вектор начальной точки прямой l) найдем как радиус-вектор основания перпендикуляра, опущенного из полюса на прямую l, т.е. как решение

системы уравнений $(\boldsymbol{r}_0, \vec{N}_1) = D_1$, $(\boldsymbol{r}_0, \vec{N}_2) = D_2$, $(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}) = 0$ $(\boldsymbol{a} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2])$. Это система уравнений типа (7.13). По формуле (7.14) ее решение

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{D_1[\vec{N}_2, \boldsymbol{a}] + D_2[\boldsymbol{a}, \vec{N}_1] + 0 \cdot [\vec{N}_1, \vec{N}_2]}{(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \boldsymbol{a})} =$$

$$= \frac{[\boldsymbol{a}, D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2]}{(\boldsymbol{a}, [\vec{N}_1, \vec{N}_2])} = \frac{[[\vec{N}_1, \vec{N}_2], D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2]}{|[\vec{N}_1, \vec{N}_2]|^2}.$$

Параметрическое уравнение l: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$, $t \in \mathbf{R}$ совпадает с (7.20). ▼

Пример 2. Напишите в параметрическом виде уравнения прямой l: $x + y - z + 1 = 0$, $x + 2y + z - 4 = 0$.

▲ В обозначениях предыдущего примера:

$$\vec{N}_1 = (1; 1; -1),\ D_1 = -1,\ \vec{N}_2 = (1; 2; 1),$$

$$D_2 = 4,\ D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2 = (5; 6; -3),$$

$$\boldsymbol{a} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (3; -2; 1),$$

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{1}{9+4+1}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{14}(0; 14; 28) = (0; 1; 2).$$

Следовательно, уравнения l — это $x = 0 + 3t$, $y = 1 - 2t$, $z = 2 + t$ или $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$. ▼

Пример 3. Найдите ортогональную проекцию $M_*(\boldsymbol{r}_*)$ точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ на прямую l, являющуюся линией пересечения плоскостей $\mathcal{P}_1$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}_1) = D_1$ и $\mathcal{P}_2$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}_2) = D_2$.

▲ Вектор $\boldsymbol{a}=[\vec{N}_1, \vec{N}_2]$ — направляющий вектор l. По условию, $M_* \in l$, $\overrightarrow{M_0M_*} \perp \boldsymbol{a}$ (т.е. $(\boldsymbol{r}_* - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}) = 0$), и мы приходим к следующей системе уравнений для определения радиус-вектора $\boldsymbol{r}_*$ точки M_*:

$$(\boldsymbol{r}_*, \vec{N}_1) = D_1, \ (\boldsymbol{r}_*, \vec{N}_2) = D_2, (\boldsymbol{r}_*, \boldsymbol{a}) = D_3.$$

Здесь $\boldsymbol{a}=[\vec{N}_1, \vec{N}_2]$, $D_3 = (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{r}_0, \vec{N}_1, \vec{N}_2)$. По формуле (7.14) находим

$$\boldsymbol{r}_* = \frac{D_1[\vec{N}_2, \boldsymbol{a}] + D_2[\boldsymbol{a}, \vec{N}_1] + D_3\boldsymbol{a}}{(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \boldsymbol{a})} =$$

$$= \frac{[[\vec{N}_1, \vec{N}_2], D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2] + (\boldsymbol{r}_0, \vec{N}_1, \vec{N}_2)[\vec{N}_1, \vec{N}_2]}{|[\vec{N}_1, \vec{N}_2]|^2}. \ ▼$$

Пример 4 (пучок плоскостей, проходящих через заданную прямую). Напишите уравнения всех плоскостей, проходящих через прямую l, которая является линией пересечения плоскостей:

$$\mathcal{P}_1\text{: } (\boldsymbol{r}, \vec{N}_1) + D_1 = 0 \text{ и } \mathcal{P}_2\text{: } (\boldsymbol{r}, \vec{N}_2) + D_2 = 0, \ [\vec{N}_1, \vec{N}_2] \neq \vec{0}.$$

□ Направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ прямой l равен $\boldsymbol{a}=[\vec{N}_1, \vec{N}_2]$. Пусть $\mathcal{P}^*$ — произвольная плоскость, проходящая через прямую l. Тогда нормальный вектор $\vec{N}^* \neq \vec{0}$ этой плоскости ортогонален вектору $\boldsymbol{a}=[\vec{N}_1, \vec{N}_2]$, т.е. параллелен плоскости, в которой векторы $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ образуют базис. Поэтому существуют (зависящие от $\vec{N}^*$, т.е. от плоскости $\mathcal{P}^*$) такие числа α и β, что $\vec{N}^* = \alpha\vec{N}_1 + \beta\vec{N}_2$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Следовательно, уравнение $\mathcal{P}^*$ — это $(\boldsymbol{r}, \alpha\vec{N}_1 + \beta\vec{N}_2) = D^*$. Число D^* также определяется плоскостью $\mathcal{P}^*$: оно выражается через α и β. Чтобы найти связь между D^*, α и β, рассмотрим произвольную точку $M_0 \in l$ с радиус-вектором $\boldsymbol{r}_0$. Так как $M_0 \in \mathcal{P}_1$, то $(\boldsymbol{r}_0, \vec{N}_1) = -D_1$; так как $M_0 \in \mathcal{P}_2$, то $(\boldsymbol{r}_0, \vec{N}_2) = -D_2$. Нако-

нец, $D^* = (\boldsymbol{r}_0, \alpha\vec{N}_1 + \beta\vec{N}_2) = -\alpha D_1 - \beta D_2$, поскольку $M_0 \in \mathcal{P}^*$. Таким образом, уравнение всякой плоскости $\mathcal{P}^*$, содержащей l, имеет вид

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{r}, \alpha\vec{N}_1 + \beta\vec{N}_2) = -\alpha D_1 - \beta D_2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha\,((\boldsymbol{r}, \vec{N}_1) + D_1) + \beta((\boldsymbol{r}, \vec{N}_2) + D_2) = 0,\end{gathered} \tag{7.21}$$

где α и β — не равные нулю одновременно числа, определяемые плоскостью $\mathcal{P}^*$. Обратно: если β и α — произвольные числа, не равные нулю одновременно, то уравнение (7.21) является уравнением некоторой плоскости, причем плоскости, содержащей l (если $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор произвольной точки $M_0 \in l$, то $M_0 \in \mathcal{P}_1$: $(\boldsymbol{r}_0, \vec{N}_1) + D_1 = 0$, $M_0 \in \mathcal{P}_2$: $(\boldsymbol{r}_0, \vec{N}_2) + D_2 = 0$ и, следовательно, $\alpha\,((\boldsymbol{r}_0, \vec{N}_1) + D_1) + \beta\,((\boldsymbol{r}_0, \vec{N}_2) + D_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$, т.е. точка M_0 лежит в плоскости, заданной уравнением (7.21)).

Уравнение (7.21) называется *уравнением пучка плоскостей, проходящих через линию пересечения плоскостей* $\mathcal{P}_1$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}_1) + D_1 = 0$ и $\mathcal{P}_2$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}_2) + D_2 = 0$. Если уравнения $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ заданы в координатной форме

$$\mathcal{P}_1\colon\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\mathcal{P}_2\colon\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то, вводя векторы $\vec{N}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{N}_2 = (A_2; B_2; C_2)$, получаем $\mathcal{P}_1$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}_1) + D_1 = 0$ и $\mathcal{P}_2$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}_2) + D_2 = 0$. Следовательно, уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую $l = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$, принимает вид (ср. с (7.21))

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \tag{7.22}$$
$$\alpha^2 + \beta^2 > 0. \ \blacksquare$$

Пример 5. Через линию пересечения двух плоскостей $\mathcal{P}_1$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}_1) = -D_1$ и $\mathcal{P}_2$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}_2) = -D_2$ проведите плоскость, перпендикулярную плоскости $\mathcal{P}_3$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}_3) = D_3$, $(\vec{N}_1, \vec{N}_3) \neq 0$.

▲ По формуле (7.21) уравнение искомой плоскости имеет вид $\alpha((\boldsymbol{r},\vec{N}_1)+D_1)+\beta((\boldsymbol{r},\vec{N}_2)+D_2)=0$, или $(\boldsymbol{r},\ \alpha\vec{N}_1+\beta\vec{N}_2)=-(\alpha D_1+\beta D_2)$. Нормальный вектор этой плоскости есть вектор $\vec{N}=\alpha\vec{N}_1+\beta\vec{N}_2$. По условию этот вектор ортогонален $\vec{N}_3$, т.е. $\alpha(\vec{N}_1,\vec{N}_3)+\beta(\vec{N}_2,\vec{N}_3)=0$. Так как $(\vec{N}_1,\vec{N}_3)\neq 0$, то $\alpha=-\beta(\vec{N}_2,\vec{N}_3)/(\vec{N}_1,\vec{N}_3)$, $\beta\neq 0$. Подставляя α и β в (7.21) и сокращая на $\beta/(\vec{N}_1,\vec{N}_3)$, получаем

$$(\boldsymbol{r},-\vec{N}_1(\vec{N}_3,\vec{N}_2)+\vec{N}_2(\vec{N}_3,\vec{N}_1))=$$

$$=D_1(\vec{N}_2,\vec{N}_3)-D_2(\vec{N}_1,\vec{N}_3)\Leftrightarrow(\boldsymbol{r},\vec{N}_3,[\vec{N}_1,\vec{N}_2])=(D_2\vec{N}_1-D_1\vec{N}_2,\vec{N}_3).\ ▼$$

Пример 6. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-3;1;0)$ и линию пересечения плоскостей $\mathcal{P}_1$: $x+2y-z+4=0$ и $\mathcal{P}_2$: $3x-y+2z-1=0$.

▲ Уравнение искомой плоскости имеет вид (см. (7.22))

$$\mathcal{P}:\alpha(x+2y-z+4)+\beta(3x-y+2z-1)=0,$$

$$\alpha^2+\beta^2>0.$$

Связь между α и β определяется из условия $M\in\mathcal{P}$, т.е. $\alpha(-3+2\cdot 1-0+4)+\beta(3\cdot(-3)-1+2\cdot 0-1)=0$, или $3\alpha-11\beta=0$. После подстановки $\alpha=\frac{11}{3}\beta$ и сокращения на $\frac{1}{3}\beta\neq 0$ уравнение $\mathcal{P}$ принимает вид $20x+19y-5z+41=0$. ▼

Пример 7. Составьте уравнение плоскости, параллельной прямой L: $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+7}{3}=\frac{z}{-2}$ и проходящей через линию пересечения плоскостей $\mathcal{P}_1$: $x-y+2=0$, $\mathcal{P}_2$: $y+z-4=0$.

▲ Уравнение искомой плоскости имеет вид

$$\alpha(x-y+2)+\beta(y+z-4)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha x+(\beta-\alpha)y+\beta z+(2\alpha-4\beta)=0.$$

Ее нормальный вектор $\vec{N}=(\alpha;\beta-\alpha;\beta)$ ортогонален направляющему вектору $\boldsymbol{a}=(-1;3;-2)$ прямой L: $\alpha\cdot(-1)+(\beta-\alpha)\cdot 3+\beta\cdot(-2)=0$. Отсюда

$\beta = 4\alpha$, а уравнение искомой плоскости $x + 3y + 4z - 14 = 0$. ▼

Пример 8. Напишите уравнение произвольной плоскости, проходящей через общую точку плоскостей $\mathcal{P}_1$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}_1) = -D_1$, $\mathcal{P}_2$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}_2) = -D_2$, $\mathcal{P}_3$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}_3) = -D_3$, $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3) \neq 0$.

▲ Пусть $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор общей точки M_0 плоскостей $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$. Тогда $(\boldsymbol{r}_0, \vec{N}_1) = -D_1$, $(\boldsymbol{r}_0, \vec{N}_2) = -D_2$, $(\boldsymbol{r}_0, \vec{N}_3) = -D_3$. Если $\mathcal{P}^*$ — произвольная плоскость, то ее нормальный вектор $\vec{N} \neq \vec{0}$ раскладывается по некомпланарным векторам $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$: $\vec{N} = \alpha \vec{N}_1 + \beta \vec{N}_2 + \gamma \vec{N}_3$ (числа α, β, γ, где $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$, определяются вектором $\vec{N}$, т.е. плоскостью $\mathcal{P}^*$). Таким образом, уравнение $\mathcal{P}^*$ — это $(\boldsymbol{r}, \alpha \vec{N}_1 + \beta \vec{N}_2 + \gamma \vec{N}_3) + D^* = 0$. Точка M_0 принадлежит $\mathcal{P}^*$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{r}_0$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{P}^*$, т.е. когда $D^* = -(\boldsymbol{r}_0, \alpha \vec{N}_1 + \beta \vec{N}_2 + \gamma \vec{N}_3) = \alpha D_1 + \beta D_2 + \gamma D_3$. Таким образом, уравнение $\mathcal{P}^*$

$$\alpha\,((\boldsymbol{r}, \vec{N}_1) + D_1) + \beta\,((\boldsymbol{r}, \vec{N}_2) + D_2) + \gamma\,((\boldsymbol{r}, \vec{N}_3) + D_3) = 0, \qquad (7.23)$$

называемое *уравнением связки плоскостей, проходящих через общую точку плоскостей* $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, описывает (при переменных α, β, γ, где $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$) множество всех плоскостей, проходящих через точку M_0. ▼

Пример 9. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и прямую l: $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \vec{M}$, $\boldsymbol{a} \neq \vec{0}$, $(\boldsymbol{a}, \vec{M}) = 0$.

▲ Запишем уравнение l в параметрическом виде: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$, $t \in \mathbf{R}$, $\boldsymbol{r}_0 = \dfrac{[\boldsymbol{a}, \vec{M}]}{|\boldsymbol{a}|^2}$. Точка M с радиус-вектором $\boldsymbol{r}$ лежит в искомой плоскости $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{a}$ компланарны, т.е. $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}) = 0$. Замечая, что $[\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}] = \vec{M} - [\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]$, получаем уравнение $\mathcal{P}$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}) = D$, $\vec{N} = \vec{M} - [\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]$, $D = (\boldsymbol{r}_1, \vec{N}) = (\boldsymbol{r}_1, \vec{M})$. ▼

Пример 10. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ и линию пересечения плоскостей $\mathcal{P}_1: (\boldsymbol{r}, \vec{N}_1)+D_1=0$ и $\mathcal{P}_2: (\boldsymbol{r}, \vec{N}_2)+D_2 = 0$, $[\vec{N}_1, \vec{N}_2] \neq 0$, $M_0 \notin \mathcal{P}_1$.

▲ Уравнение искомой плоскости $\mathcal{P}$ (см. (7.21))

$$\alpha\,((\boldsymbol{r}, \vec{N}_1)+D_1) + \beta\,((\boldsymbol{r}, \vec{N}_2)+D_2) = 0,\ \alpha^2+\beta^2>0.$$

Числа α и β удовлетворяют условию $\alpha((\boldsymbol{r}_0, \vec{N}_1)+D_1)+\beta((\boldsymbol{r}_0, \vec{N}_2)+D_2) = 0$, $((\boldsymbol{r}_0, \vec{N}_1)+D_1) \neq 0$. Выражая отсюда α и подставляя в уравнение плоскости $\mathcal{P}$, после сокращения на число $-\beta/((\boldsymbol{r}_0, \vec{N}_1)+D_1) \neq 0$ получаем

$$((\boldsymbol{r}_0, \vec{N}_2)+D_2)((\boldsymbol{r}, \vec{N}_1)+D_1) - ((\boldsymbol{r}_0, \vec{N}_1)+D_1)\ ((\boldsymbol{r}, \vec{N}_2)+D_2) = 0. \ ▼$$

Пример 11. Даны прямая l: $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \vec{M}$, $\boldsymbol{a} \neq \vec{0}$, $(\boldsymbol{a}, \vec{M}) = 0$ и плоскость $\mathcal{P}$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}) = D$, $\vec{N} \neq \vec{0}$. При каком условии: а) l и $\mathcal{P}$ имеют единственную общую точку; б) $l \cap \mathcal{P} = \varnothing$; в) $l \subset \mathcal{P}$?

▲ а) Запишем уравнение l в параметрическом виде: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t, t \in \mathbf{R}$, где $\boldsymbol{r}_0 = [\boldsymbol{a}, \vec{M}]/|\boldsymbol{a}|^2$. Прямая l и плоскость $\mathcal{P}$ имеют единственную общую точку тогда и только тогда, когда уравнение

$$(\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t, \vec{N}) = D \Leftrightarrow t(\boldsymbol{a}, \vec{N}) = D - (\boldsymbol{r}_0, \vec{N}) \tag{7.24}$$

имеет единственное решение t. Это имеет место тогда и только тогда, когда $(\boldsymbol{a}, \vec{N}) \neq 0$. В этом случае $t = \dfrac{D-(\boldsymbol{r}_0, \vec{N})}{(\boldsymbol{a}, \vec{N})} = \dfrac{D\boldsymbol{a}^2 - (\boldsymbol{a}, \vec{M}, \vec{N})}{\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{a}, \vec{N})}$, а радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ общей точки прямой l и плоскости $\mathcal{P}$ определяется формулой

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}\frac{D-(\boldsymbol{r}_0, \vec{N})}{(\boldsymbol{a}, \vec{N})} = \frac{D\boldsymbol{a} + \boldsymbol{r}_0(\vec{N}, \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}(\vec{N}, \boldsymbol{r}_0)}{(\boldsymbol{a}, \vec{N})} =$$

$$= \frac{D\boldsymbol{a} + [\vec{N}, [\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}]]}{(\boldsymbol{a}, \vec{N})} = \frac{D\boldsymbol{a} + [\vec{N}, \vec{M}]}{(\boldsymbol{a}, \vec{N})}. \tag{7.25}$$

б) Если $(\boldsymbol{a}, \vec{N}) = 0$, $D \neq (\boldsymbol{a}, \vec{M}, \vec{N}) / |\boldsymbol{a}|^2$, то уравнение (7.24) имеет вид $t \cdot 0 = D - (\boldsymbol{a}, \vec{M}, \vec{N}) / |\boldsymbol{a}|^2$ и решений не имеет, т.е. l и $\mathcal{P}$ общих точек не имеют.

в) Если $(\boldsymbol{a}, \vec{N}) = 0$, $D|\boldsymbol{a}|^2 = (\boldsymbol{a}, \vec{M}, \vec{N})$, то уравнение (7.24) принимает вид $t \cdot 0 = 0$. Его решением является любое число t. Таким образом, любая точка прямой l лежит и в плоскости $\mathcal{P}$: $l \subset \mathcal{P}$. ▼

Пример 12. Найдите ортогональную проекцию $M_*(\boldsymbol{r}_*)$ точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ на прямую l: $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \vec{M}$, $\boldsymbol{a} \neq \vec{0}$, $(\boldsymbol{a}, \vec{M}) = 0$.

▲ По условию, $M_* \in l$, т.е. $[\boldsymbol{r}_*, \boldsymbol{a}] = \vec{M}$, и $\overrightarrow{M_*M_1} \perp \boldsymbol{a}$, или $(\boldsymbol{r}_*, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a})$. Задача сведена, таким образом, к нахождению радиус-вектора $\boldsymbol{r}_*$ общей точки прямой l: $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \vec{M}$ и плоскости $\mathcal{P}$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}) = D$, $\vec{N} = \boldsymbol{a}$, $D = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a})$. По формуле (7.25)

$$\boldsymbol{r}_* = \frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} + [\boldsymbol{a}, \vec{M}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}. \ ▼$$

Пример 13. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и пересекающей ортогонально прямую l: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}_i) = D_i$, $i = 1, 2$, $[\vec{N}_1, \vec{N}_2] \neq \vec{0}$.

▲ Пусть $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на прямую l. Тогда из условий $M_0 \in l$ и $(M_1M_0) \perp l$, т.е. $(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}) = 0$, где $\boldsymbol{a} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2]$ — направляющий вектор l, имеем

$$(\boldsymbol{r}_0, \vec{N}_1) = D_1, \ (\boldsymbol{r}_0, \vec{N}_2) = D_2, (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}) = D_3,$$

$$D_3 = (\boldsymbol{r}_1, \vec{N}_1, \vec{N}_2).$$

Получена система уравнений типа (7.13). Ее решение (см. (7.14)):

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{[[\vec{N}_1, \vec{N}_2], D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2] + (\boldsymbol{r}_1, \vec{N}_1, \vec{N}_2)[\vec{N}_1, \vec{N}_2]}{|[\vec{N}_1, \vec{N}_2]|^2}.$$

Уравнение перпендикуляра $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + (\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1)t,\ t \in \mathbf{R}$. ▼

Пример 14. Составьте уравнение плоскости $\mathcal{P}$, проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и перпендикулярной линии l пересечения плоскостей $\mathcal{P}_1$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}_1) = D_1$ и $\mathcal{P}_2$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}_2) = D_2$, $[\vec{N}_1, \vec{N}_2] \neq \vec{0}$.

▲ Вектор $\boldsymbol{a} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2]$, направляющий вектор прямой l, является нормальным вектором искомой плоскости, уравнение которой, следовательно, $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}) = D$. Число D находится из условия $M_1 \in \mathcal{P}$: $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}) = D$. Окончательно уравнение $\mathcal{P}$ — это $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \vec{N}_1, \vec{N}_2) = 0$. ▼

Пример 15. Составьте уравнение прямой, лежащей в плоскости $\mathcal{P}$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}) = D$, $\vec{N} \neq \vec{0}$ и пересекающей под прямым углом прямую l: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$, при условии, что $(\boldsymbol{a}, \vec{N}) \neq 0$, $[\boldsymbol{a}, \vec{N}] \neq \vec{0}$.

▲ Радиус-вектор $\boldsymbol{r}_*$ общей точки M_* плоскости $\mathcal{P}$ и прямой l находится из соотношений $\boldsymbol{r}_* = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$, $(\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t, \vec{N}) = D$, т.е.

$$\boldsymbol{r}_* = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}\frac{D - (\boldsymbol{r}_0, \vec{N})}{(\boldsymbol{a}, \vec{N})}.$$

Искомая прямая обязательно проходит через эту точку. Поскольку искомая прямая L лежит в плоскости $\mathcal{P}$, направляющий вектор $\boldsymbol{b}$ прямой L ортогонален $\vec{N}$. По условию, также $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}$. Следовательно, в качестве направляющего вектора прямой L можно взять вектор $\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{a}, \vec{N}]$. Таким образом, уравнение L — это

$$\boldsymbol{r} = \left(\boldsymbol{r}_0 + \frac{D - (\boldsymbol{r}_0, \vec{N})}{(\boldsymbol{a}, \vec{N})}\boldsymbol{a}\right) + [\boldsymbol{a}, \vec{N}]\tau,\ \tau \in \mathbf{R}.\ ▼$$

Пример 16. Через прямую l: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$ проведите плоскость, перпендикулярную плоскости $\mathcal{P}$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}) = D$, $[\boldsymbol{a}, \vec{N}] \neq \vec{0}$.

▲ Точка $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ и один из направляющих векторов (вектор $\boldsymbol{a}$) искомой плоскости известны. В качестве второго направляющего вектора можно

взять, например, вектор $\vec{N}$, поскольку по условию искомая плоскость, будучи перпендикулярна плоскости $\mathcal{P}$, параллельна ее нормальному вектору $\vec{N}$. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\vec{N}$ не коллинеарны. Искомая плоскость им параллельна. Поэтому в качестве нормального вектора искомой плоскости можно взять $\vec{N}^* = [\boldsymbol{a}, \vec{N}]$, а уравнение этой плоскости $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}, \vec{N}) = 0$. ▼

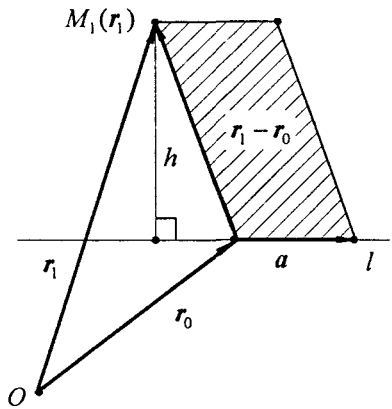

Рис. 7.11

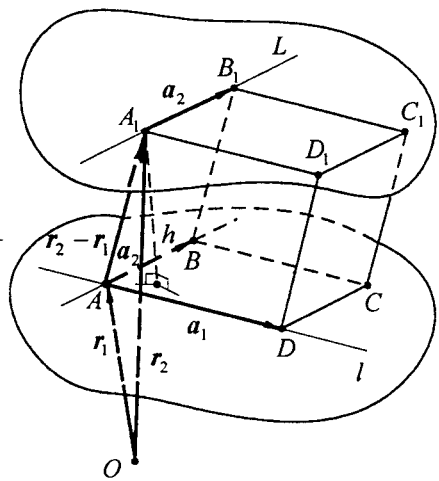

Рис. 7.12

Пример 17. Найдите расстояние от точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ до прямой l: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$.

▲ Искомое расстояние h — длина высоты параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{a}$ (рис. 7.11). Следовательно,

$$h = \frac{|[\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}]|}{|\boldsymbol{a}|}. \ ▼$$

Пример 18. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми l: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_1 t$ и L: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}_2 \tau$.

▲ Искомое расстояние h — длина общего перпендикуляра к прямым l и L, т.е. расстояние между параллельными плоскостями, одна из которых содержит прямую l, а другая — прямую L, т.е. длина высоты параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7.12), построенного на векторах $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, т.е. число

$$h = \frac{|(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)|}{|[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]|}. \ ▼$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Докажите, что если четырехугольники $ALPH$, $AMBD$, $AHBC$, $BKEM$, $LKEP$ суть параллелограммы, то и $ABCD$ — параллелограмм.

2. На плоскости или в пространстве дано несколько точек. Для некоторых пар (A, B) этих точек взяты векторы $\overrightarrow{AB}$, причем так, что в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Найдите сумму всех взятых векторов.

3. Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ — некоторый набор точек, $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ — заданный вектор, $B_j = T_{\overrightarrow{AB}}(A_j)$, $j = 1, ..., n$. Докажите, что для любой перестановки[1] $\sigma = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ чисел $1, 2, ..., n$ выполнено неравенство $\sum_{j=1}^{n} |\overrightarrow{A_j B_{\alpha_j}}| \geq n|\boldsymbol{a}|$. В каких случаях имеет место знак равенства?

4. На плоскости дано n векторов $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n$, среди которых есть два неколлинеарных. Известно, что сумма любых $n-1$ векторов коллинеарна вектору, не включенному в сумму. Найдите вектор $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + ... + \boldsymbol{a}_n$.

5. На плоскости имеется несколько векторов длины, не меньшей 1. Докажите, что всегда можно выбросить один из них так, чтобы сумма оставшихся имела длину, не меньшую 1.

6. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ — компланарные векторы, длина каждого из которых не превосходит 1. Докажите, что в сумме $\boldsymbol{a} = \pm\boldsymbol{a}_1 \pm \boldsymbol{a}_2 \pm ... \pm \boldsymbol{a}_n$ можно выбрать знаки так, чтобы выполнилось неравенство $|\boldsymbol{a}| \leq \sqrt{2}$.

---

[1] По поводу определения перестановки см. §1, гл. 2, раздел 2.