

## РАЗДЕЛ 2. МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В §4 гл. 2 раздела 1 в частных случаях  $n = 2$  и  $n = 3$  были введены понятия матрицы и определителя и установлены их свойства, а также рассмотрены некоторые вопросы теории систем линейных уравнений. Целью этого раздела является распространение понятий и методов, изложенных в §4 гл. 2 раздела 1, на случай произвольного  $n$ .

### ГЛАВА 1. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

#### §1. Определение матрицы. Столбцы и строки

*Матрицей размеров  $m \times n$*  называется прямоугольная таблица из  $m$  строк и  $n$  столбцов, заполненная некоторыми математическими объектами. Объекты, составляющие матрицу, называются ее *элементами*, строки и столбцы таблицы — соответственно *строками* и *столбцами* матрицы. Если матрица состоит из одной строки (одного столбца), то вместо “матрица, состоящая из одной строки (одного столбца)”, говорят короче: “строка (столбец)”.

Как правило, мы будем рассматривать матрицы, элементами которых являются числа (действительные или комплексные), такие матрицы называются *числовыми*, но в общем случае элементами матриц могут быть математические объекты различной природы, например: функции, матрицы и т.д. В §4 гл. 2 раздела 1 мы рассматривали матрицы, одна из строк (один из столбцов) которых состоит из векторов, а все остальные — из чисел.

Обычно матрицы обозначают заглавными буквами:  $A$ ,  $B$ ,  $X$ ,  $W$  и т.д., а их элементы — соответствующими строчными буквами с двумя индексами:  $a_{ij}$ ,  $b_{si}$ ,  $x_{pq}$ ,  $w_h$  и т.д., указывающими “адрес” элемента: первый индекс дает номер строки, содержащей элемент, второй — номер столбца. При этом строки нумеруются сверху вниз, а столбцы — слева направо. Таким образом, матрица  $A$  размеров  $m \times n$  записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Условимся для краткости матрицу (1.1) записывать также в виде  $A = (a_{ij})$ .

Матрица  $B$ , состоящая из элементов, находящихся на пересечениях нескольких выбранных строк матрицы  $A$  и нескольких выбранных ее столбцов, называется *подматрицей (субматрицей)* для матрицы  $A$ . Если  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  — номера выбранных строк и  $j_1 < j_2 < \dots < j_l$  — номера выбранных столбцов, то соответствующая подматрица есть

$$B = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_l} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_l} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

В частности, строки и столбцы матрицы можно рассматривать как ее подматрицы.

**Пример 1.** Данна матрица  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Выпишите ее подматрицу  $B$ , соответствующую: 1) строкам с номерами 1, 2, 4 и столбцам с номерами 2, 5; 2) строкам и столбцам с номерами 1, 3, 4.

▲ По формуле (1.2) имеем:

$$1) \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2) \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Часто бывает удобно рассматривать матрицу как совокупность ее столбцов (строк). Точнее, если

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{q}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

— столбцы, а

$$\mathbf{p}_1 = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}), \quad \mathbf{p}_2 = (a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n}), \dots, \quad \mathbf{p}_m = (a_{m1} \ a_{m2} \ \dots \ a_{mn})$$

— строки матрицы  $A(1.1)$ , то на матрицу  $A$  можно смотреть либо как на строку  $(\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \dots \ \mathbf{q}_n)$  из ее столбцов (подматриц  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ ), либо как на столбец

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_m \end{pmatrix}$$

из ее строк (подматриц  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m$ ). В первом случае пишут  $A = (\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \dots \ \mathbf{q}_n)$ , во втором —

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_m \end{pmatrix}.$$

Если число строк в матрице  $A$  (1.1) равно числу столбцов, т.е.  $m = n$ , то матрица  $A$  называется *квадратной*, а число ее строк (столбцов) — ее *порядком*. Все остальные матрицы называются *прямоугольными*. Например, квадратной (порядка 3) является матрица  $B$  из п. 2) примера 1, тогда как матрица  $B$  из п. 1) этого примера и исходная матрица  $A$  являются прямоугольными.

Пусть дана квадратная матрица  $A = (a_{ij})$  порядка  $n$ . Элементы  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ , образующие *главную диагональ* матрицы  $A$ , называются ее *диагональными* элементами. Матрица  $A$  называется *диагональной*, если все ее недиагональные элементы равны 0, т.е. если  $a_{ij} = 0$  при всех  $i \neq j$ . Диагональная матрица  $D$  порядка  $n$  с диагональными элементами  $d_1, d_2, \dots, d_n$  ( $i$  — номер строки, содержащей элемент  $d_i$ ) обозначается  $\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ . Диагональная матрица  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  называется *скалярной* (обозначается просто  $d$ ) и если все ее диагональные элементы равны одному и тому же числу  $d$ :  $d_i = d$  для каждого  $i = 1, 2, \dots, n$ , и *единичной* (порядка  $n$ ), если  $d = 1$ . Обозначается единичная матрица буквой  $E$  (или  $E_n$ , если нужно указать порядок). Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* матрицей и обозначается  $O$ .