§2. Сложение матриц и умножение матрицы на число

Введем алгебраические действия (операции) над матрицами. В этом параграфе и всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, предполагается, что рассматриваемые матрицы являются числовыми.

Две матрицы A и B считаются *равными* (пишут: $A = B$), если они имеют одинаковые размеры (говорят также — одинаковое строение), и если равны их элементы, стоящие на одинаковых местах. Например, матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} \sin\pi & \cos\pi \\ \ln e^2 & \sqrt[4]{9} \end{pmatrix}$ равны, поскольку, как известно, $\sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$, $\ln e^2 = 2$ и $\sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$. Напротив, матрицы $C = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ и $D = \begin{pmatrix} 1 & p \\ q & r \end{pmatrix}$ не равны ни при каких значениях параметров a, b, c, p, q, r, поскольку $c_{11} = 0$, а $d_{11} = 1 \neq 0$. Не равны также единичные матрицы E_n и E_m при $n \neq m$, поскольку у них разные размеры.

Пусть $A = (a_{ij})$ — данная матрица размеров $m \times n$, α — произвольное число. Матрица $C = (c_{ij})$ размеров $m \times n$, у которой $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$, называется *произведением матрицы A на число* α и обозначается αA. Таким образом,

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \ldots & \alpha a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \ldots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Пример 1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} i & -1 & 2+i & 4 \\ 0 & 3 & i+1 & 1 \\ 1 & 2i & 5 & -i \end{pmatrix}$. Найдите произведение этой матрицы на число $\alpha = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

▲ Поскольку

$$\alpha = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - i,$$

по формуле (1.3) имеем:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} (1-i)i & (1-i)(-1) & (1-i)(2+i) & (1-i)\cdot 4 \\ (1-i)\cdot 0 & (1-i)\cdot 3 & (1-i)(i+1) & (1-i)\cdot 1 \\ (1-i)\cdot 1 & (1-i)\cdot 2i & (1-i)\cdot 5 & (1-i)(-i) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+i & -1+i & 3-i & 4-i \\ 0 & 3-3i & 2 & 1-i \\ 1-i & 2+2i & 5-5i & -1-i \end{pmatrix}. \blacktriangledown$$

Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — данные матрицы размеров $m \times n$. Матрица $C = (c_{ij})$ размеров $m \times n$, у которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех $i = 1, 2, ..., m$ и $j = 1, 2, ..., n$, называется *суммой* матриц A и B и обозначается $A + B$. Таким образом,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.4)$$

Отметим некоторые свойства введенных операций над матрицами: для любых матриц A, B, C одинакового строения и любых чисел α_1, α_2, α имеем:

1°. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность сложения).

2°. $A + B = B + A$ (коммутативность сложения).

3°. Если O — нулевая матрица того же строения, что и матрица A, то $A + O = A$.

4°. Существует матрица, называемая *противоположной* матрице A и обозначаемая $-A$, такая, что $A + (-A) = O$, где O — нулевая матрица того же строения, что и A. Для данной матрицы A противоположная матрица единственна и равна $(-1)\cdot A$.

Сумма матриц B и $-A$ называется *разностью* матриц B и A и обозначается $B - A$. Таким образом,

$$B - A = \begin{pmatrix} b_{11} - a_{11} & b_{12} - a_{12} & \dots & b_{1n} - a_{1n} \\ b_{21} - a_{21} & b_{22} - a_{22} & \dots & b_{2n} - a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} - a_{m1} & b_{m2} - a_{m2} & \dots & b_{mn} - a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.5)$$

5°. $(\alpha_1+\alpha_2)A=\alpha_1 A+\alpha_2 A$.

6°. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

Свойства 5° и 6° называются свойствами дистрибутивности.

7°. $\alpha_1(\alpha_2 A)=(\alpha_1\alpha_2)A$ (ассоциативность умножения на число).

8°. $1\cdot A=A$.

Все перечисленные свойства непосредственно следуют из определений операций над матрицами и свойств сложения и умножения чисел. Докажем, например, свойство 4°.

□ Пусть $A=(a_{ij})$ — данная матрица. То, что матрица $(-1)\cdot A=$ $=(-a_{ij})$ удовлетворяет равенству $A+(-1)\cdot A=0$ и, следовательно, является по определению противоположной матрице A, следует из (1.4). Докажем единственность противоположной матрицы. Пусть $X=(x_{ij})$ — какая-то противоположная A матрица. Тогда $A+X=O$, т.е. в силу (1.4) и определения равенства матриц, для всех $i=1,2,\ldots,m$ и $j=1,2,\ldots,n$ справедливы равенства $a_{ij}+x_{ij}=0$, откуда $x_{ij}=-a_{ij}$, т.е. $X=(-1)\cdot A$. ■

Свойства 1°, 2°, 5° и 6° по индукции распространяются на любое конечное число слагаемых, свойство 7° — на любое конечное число сомножителей α_i.

Пример 2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}4&1&1\\-4&2&0\\1&2&1\end{pmatrix}$. Найдите $A+B$ и $A-B$.

▲ В силу (1.4) и (1.5) имеем

$$A+B=\begin{pmatrix}1+4&2+1&1+1\\2+(-4)&1+2&2+0\\1+1&2+2&3+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3&2\\-2&3&2\\2&4&4\end{pmatrix},$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1-4&2-1&1-1\\2-(-4)&1-2&2-0\\1-1&2-2&3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&1&0\\6&-1&2\\0&0&2\end{pmatrix}.$$ ▼

Пусть $A_1, \ldots, A_k$ — матрицы размеров $m\times n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — произвольные числа. Матрица $A=\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_k A_k$ называется *линейной комбинацией* матриц $A_1, \ldots, A_k$ с коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Положив

в этом определении $m = 1$, приходим к понятию линейной комбинации строк (длины n), взяв $n = 1$, — к понятию линейной комбинации столбцов (высоты m). В частности, можно говорить о линейной комбинации строк (столбцов) данной матрицы

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

размеров $m \times n$ с коэффициентами $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ (соответственно $\beta_1, \dots, \beta_n$). Этой линейной комбинацией является следующая строка L длины n:

$$L = (\alpha_1 b_{11} + \alpha_2 b_{21} + \dots + \alpha_m b_{m1} \dots \alpha_1 b_{1n} + \alpha_2 b_{2n} + \dots + \alpha_m b_{mn}) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_{i1} \dots \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_{in} \right) \tag{1.7}$$

(соответственно, следующий столбец H высоты m:

$$H = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_{mj} \end{pmatrix}). \tag{1.8}$$

Если B рассматривается как совокупность своих строк $q_1, \dots, q_m$ (столбцов $p_1, \dots, p_n$), то (1.7) и (1.8) принимают, соответственно, вид:

$$L = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_m q_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i q_i, \tag{1.7'}$$

$$H = \beta_1 p_1 + \dots + \beta_n p_n = \sum_{j=1}^{n} \beta_j p_j. \tag{1.8'}$$

Пример 3. Вычислите линейную комбинацию матриц:

1) $A_1 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

▲ По формулам (1.3) — (1.5) имеем:

$$1)\ A_1=\begin{pmatrix}3&6\\3&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&2\\3&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&4\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-3-0&6-2-4\\3-3-0&6-2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0,$$

$$2)\ A_2=\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\15\\18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-0\\4-15\\2-18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-11\\-16\end{pmatrix}.\ \blacktriangledown$$

Пример 4. Вычислите линейную комбинацию строк матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

с коэффициентами, равными номерам строк.

▲ Положив $\alpha_i=i$ для $i=1,2,3,$ получим, в силу (1.6) — (1.7), что искомая линейная комбинация L равна

$$L=(1\cdot2+2\cdot0+3\cdot(-1)\quad 1\cdot(-1)+2\cdot2+3\cdot(-1)\quad 1\cdot0+2\cdot(-1)+3\cdot1)=$$
$$=(-1\ \ 0\ \ 1).\ \blacktriangledown$$

Квадратная матрица $A=(a_{ij})$ называется *верхней* (*нижней*) *треугольной,* если все ее элементы под (над) главной диагональю равны нулю, т.е. если $a_{ij}=0$ для всех $i<j$ (соответственно, $i>j$).

Пример 5. 1) Пусть A и B — диагональные матрицы одного порядка, α — число. Докажите, что матрицы αA, $A+B$ и $A-B$ — диагональные. 2) Пусть A и B — верхние (нижние) треугольные матрицы одного порядка, α — число. Докажите, что матрицы αA, $A+B$ и $A-B$ — верхние (нижние) треугольные.

▲ Поскольку всякая диагональная матрица является одновременно и верхней, и нижней треугольной, достаточно доказать утверждение п. 2). Пусть для определенности A и B — верхние треугольные матрицы порядка n (случай нижних треугольных матриц рассматривается аналогично) и пусть $C=A+B$. В силу (1.4) для всех $i,j=1,2,...,n$ $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Поэтому, если $a_{ij}=b_{ij}=0$ для всех $i<j$, то и $c_{ij}=0$ для всех указанных i и j. По определению это означает, что C — верхняя треугольная матрица. Аналогично доказывается, что αA и $A-B$ — верхние треугольные матрицы. ▼

Пусть $A=(a_{ij})$— квадратная матрица порядка n. Ее *следом* (обозначение: $\operatorname{tr} A$) называется число $a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$, т.е. сумма диагональных элементов матрицы A.

Пример 6. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка n. Докажите, что $\operatorname{tr}(A\pm B)=\operatorname{tr}A\pm\operatorname{tr}B$.

▲ Если $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, то, в силу (1.4) — (1.5), по определению следа матрицы имеем:

$$\operatorname{tr}(A\pm B)=\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}\pm b_{ii})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\pm\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=\operatorname{tr}A\pm\operatorname{tr}B. \ ▼$$

§3. Умножение матриц

Введем операцию умножения матрицы на матрицу. Назовем произведением строки $A=(a_1\ a_2\ \ldots a_n)$ на столбец

$$B=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

число $a_1b_1+\ldots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$. Пусть теперь $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ — произвольные матрицы размеров $m\times k$ и $k\times n$ соответственно. *Произведением AB матрицы A на матрицу B* (в указанном порядке!) называется матрица C размеров $m\times n$, элемент c_{ij} i-ой строки и j-го столбца которой равен произведению i-ой строки A на j-ый столбец B:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1j} & \ldots & c_{1n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ c_{i1} & \ldots & \boxed{c_{ij}} & \ldots & c_{in}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ c_{m1} & \ldots & c_{mj} & \ldots & c_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \boxed{a_{i1} \quad \ldots \quad a_{ik}}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{m1} & \ldots & a_{mk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ b_{k1} & \ldots & b_{kj} & \ldots & b_{kn}\end{pmatrix},$$