Пусть $A=(a_{ij})$— квадратная матрица порядка $n$. Ее *следом* (обозначение: $\operatorname{tr} A$) называется число $a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$, т.е. сумма диагональных элементов матрицы $A$.

**Пример 6.** Пусть $A$ и $B$ — квадратные матрицы порядка $n$. Докажите, что $\operatorname{tr}(A\pm B)=\operatorname{tr}A\pm\operatorname{tr}B$.

▲ Если $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, то, в силу (1.4) — (1.5), по определению следа матрицы имеем:

$$\operatorname{tr}(A\pm B)=\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}\pm b_{ii})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\pm\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=\operatorname{tr}A\pm\operatorname{tr}B. \ ▼$$

## §3. Умножение матриц

Введем операцию умножения матрицы на матрицу. Назовем произведением строки $A=(a_1\ a_2\ \ldots a_n)$ на столбец

$$B=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

число $a_1b_1+\ldots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$. Пусть теперь $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ — произвольные матрицы размеров $m\times k$ и $k\times n$ соответственно. *Произведением $AB$ матрицы $A$ на матрицу $B$* (в указанном порядке!) называется матрица $C$ размеров $m\times n$, элемент $c_{ij}$ $i$-ой строки и $j$-го столбца которой равен произведению $i$-ой строки $A$ на $j$-ый столбец $B$:

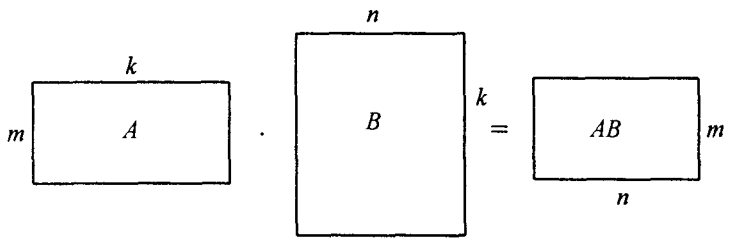
$$\begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1j} & \ldots & c_{1n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ c_{i1} & \ldots & \boxed{c_{ij}} & \ldots & c_{in}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ c_{m1} & \ldots & c_{mj} & \ldots & c_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \boxed{a_{i1} \quad \ldots \quad a_{ik}}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{m1} & \ldots & a_{mk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ b_{k1} & \ldots & b_{kj} & \ldots & b_{kn}\end{pmatrix},$$

т.е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir}b_{rj} \qquad (1.9)$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$.

Таким образом, для прямоугольных матриц $A$ и $B$ произведение определено, если длины строк первого сомножителя $A$ равны высотам столбцов второго сомножителя $B$, т.е. если число столбцов $A$ равно числу строк $B$. Условие, когда произведение матриц определено, а также размеры произведения двух матриц удобно изобразить при помощи следующей схемы:




(1.10)

**Пример 1.** Выясните, определено ли произведение матриц, и если оно определено, то вычислите его: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}(1 \quad 2)$; 2) $(1 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

▲ 1) Первый сомножитель имеет размеры $2 \times 2$, второй — $1 \times 2$. В соответствии с (1.10) заключаем, что данное произведение не определено.

2) В соответствии с (1.10) заключаем, что данное произведение определено ($m = 1$, $k = 2$, $n = 2$). В силу (1.9) оно равно

$$(1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4) = (7 \quad 10). \ ▼$$

**Пример 2.** 1) Можно ли умножить строку длины $m$ на столбец высоты $n$? 2) Можно ли умножить столбец высоты $n$ на строку длины $m$?

▲ 1) В соответствии с (1.10) умножение возможно, только если $m = n$. При выполнении этого условия произведение является *числом*.

2) Можно при любых $n$ и $m$. При этом произведение является *матрицей* размеров $n \times m$. Точнее, если

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

— данный столбец, а $B = (b_1\ b_2\ \dots b_m)$ — данная строка, то в силу (1.9)

$$AB = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_m \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_m \end{pmatrix}. \blacktriangledown$$

**Пример 3.** Вычислите произведение $AB$, если:

1) $A = (2\ \ -3\ \ 0)$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = (2\ \ -3)$;

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2+i \\ -i & 1+2i \end{pmatrix}$; 6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$;

7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$\blacktriangle$ По формуле (1.9) имеем:

1) $AB = (2 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 + 0 \cdot 1) = (-1)$;

2) $AB = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 2 & 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 6 & -9 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$;

3) $AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$.

4) $AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 & 1 \cdot (-4) + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 4 \\ 2 \cdot (-1) + 4 \cdot (-1) + 6 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + 4 \cdot (-2) + 6 \cdot 2 & 2 \cdot (-4) + 4 \cdot (-4) + 6 \cdot 4 \\ 3 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1) + 9 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) + 6 \cdot (-2) + 9 \cdot 2 & 3 \cdot (-4) + 6 \cdot (-4) + 9 \cdot 4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$;

5) $AB=\begin{pmatrix} i\cdot 1+1\cdot(-i) & i\cdot(-2+i)+1\cdot(1+2i) \\ (-1)\cdot 1+i\cdot(-i) & (-1)\cdot(-2+i)+i\cdot(1+2i) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O;$

Таким образом, в отличие от произведения чисел, которое может равняться нулю, только если равен нулю хотя бы один из сомножителей, *произведение матриц может оказаться равным нулю даже тогда, когда оба сомножителя — ненулевые матрицы.* Как видно из приведенных примеров, этот вывод справедлив как для матриц с действительными элементами, так и для матриц с комплексными элементами.

6) $AB=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 5 & 1\cdot 2+2\cdot 3 \\ 3\cdot 1+4\cdot 5 & 3\cdot 2+4\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 23 & 18 \end{pmatrix}.$

7) $AB=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 3 & 1\cdot 2+2\cdot 4 \\ 5\cdot 1+3\cdot 3 & 5\cdot 2+3\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 14 & 22 \end{pmatrix}.$ ▼

Замечание. Из (1.9) — (1.10) следует, что *j-ый столбец матрицы $AB$ есть линейная комбинация столбцов $q_1, q_2, ..., q_k$ матрицы $A$ с коэффициентами $b_{1j}, b_{2j}, ..., b_{kj}$, равными элементам j-го столбца матрицы $B$, а i-ая строка матрицы $AB$ есть линейная комбинация строк $p_1, p_2, ..., p_k$ матрицы $B$ с коэффициентами $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ik}$, равными элементам i-ой строки матрицы $A$* (см. выражения для элементов произведения $AB$ в пунктах 3) и 4) примера 3, где для удобства столбцы матрицы $A$ выделены пунктиром). Отсюда, в частности, вытекает, что при умножении слева матрицы $B$ на диагональную матрицу $A = \mathrm{diag}(d_1, ..., d_k)$ строки $B$ умножаются на числа $d_1, ..., d_k$ ($i$-ая строка $B$ умножается на $d_i$), а при умножении справа матрицы $A$ на диагональную матрицу $B=\mathrm{diag}(d_1, ..., d_k)$ столбцы $A$ умножаются на числа $d_1, ..., d_k$. Поэтому, если $A$ — квадратная матрица порядка $n$, а $d$ — скалярная матрица того же порядка, то справедливо равенство $dA = Ad$, причем произведение $dA$ можно понимать как и произведение матрицы $A$ на число $d$. В частности, $E_nA = AE_n$ для любой матрицы $A$ порядка $n$, что, впрочем, легко проверяется непосредственно. Очевидно, что $O\cdot A = A\cdot O$, где $O$ — нулевая матрица подходящего строения. Отметим еще, что подматрица матрицы $C = AB$, образованная строками с номерами $i_1, i_2, ..., i_k$ и столбцами с номерами $j_1, j_2, ..., j_l$, равна произведению подматрицы матрицы $A$, составленной из строк с номерами $i_1, i_2, ..., i_k$, на подматрицу матрицы $B$, составленную из столбцов с номерами $j_1, j_2, ..., j_l$. Это непосредственно следует из определения (1.9).

**Пример 4.** Пусть $A$ и $B$ — верхние (нижние) треугольные матрицы порядка $n$. Докажите, что $AB$ — верхняя (нижняя) треугольная матрица порядка $n$.

▲ Элементы матрицы $C = AB$ в силу (1.9) равны $c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj}$, $i, j = 1, 2, ..., n$. Пусть для определенности $A$ и $B$ — верхние треугольные матрицы (в случае нижних треугольных матриц доказательство проводится аналогично). Тогда $a_{ir} = 0$ при $r < i$ и $b_{rj} = 0$ при $r > j$. Следовательно, если $j < i$, то $a_{ir} b_{rj} = 0$ при *любом* $r = 1, 2, ..., n$ (если $r < i$, то $a_{ir} = 0$, а если $r \geq i > j$, то $b_{rj} = 0$). Значит, $c_{ij} = 0$ при всех $i > j$, т.е. $C$ — верхняя треугольная матрица. ▼

Последние два пункта примера 3 поучительны тем, что в них рассматриваются произведения одинаковых сомножителей, но в разных порядках. Результаты получились различными. Следовательно, свойство коммутативности при умножении даже квадратных матриц не имеет места. Тем более, оно не имеет места при умножении прямоугольных матриц $A$ и $B$, поскольку при этом, например, одно из произведений $AB$ или $BA$ может просто не быть определено. Если определены оба произведения $AB$ и $BA$, то число столбцов $A$ равно числу строк $B$ и число столбцов $B$ равно числу строк $A$. Оба произведения $AB$ и $BA$ будут квадратными матрицами, но разных размеров, если матрицы $A$ и $B$ не квадратные. Если $A$ и $B$ — квадратные матрицы, то $AB$ не обязано равняться $BA$ (см. пример 3, п.п. 6 и 7). Матрицы $A$ и $B$, для которых $AB = BA$, называются *коммутирующими* (*перестановочными*). Например, матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$ коммутируют, ибо $AB = BA = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 24 & 36 \end{pmatrix}$, матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ не коммутируют (пример 3). Непосредственно из определения произведения матриц следует, что любые две диагональные матрицы $A = \operatorname{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ и $B = \operatorname{diag}(\beta_1, ..., \beta_n)$ одного порядка коммутируют, при этом $AB = BA = \operatorname{diag}(\alpha_1\beta_1, ..., \alpha_n\beta_n)$, и что скалярная матрица $\alpha$ порядка $n$ коммутирует с любой другой квадратной матрицей порядка $n$ (см. также замечание перед примером 4).

**Пример 5.** Пусть $A$ — диагональная матрица, все диагональные элементы которой различны. Докажите, что если матрица $B$ коммутирует с матрицей $A$, то $B$ — диагональная матрица.

▲ Пусть $A = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $B = (b_{ij})$. Тогда на пересечении $i$-ой строки и $j$-го столбца в матрице $AB$ стоит число $\alpha_i b_{ij}$, а в матрице $BA$ — число $\alpha_j b_{ij}$. Если $AB = BA$, то для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$ имеем $\alpha_i b_{ij} = \alpha_j b_{ij}$. Поскольку все $\alpha_i$ различны, отсюда следует, что при $i \neq j$ $b_{ij} = 0$, т.е. $B$ — диагональная матрица. Из доказанного утверждения, в частности, следует, что только диагональная матрица порядка $n$ может коммутировать со *всеми* диагональными матрицами порядка $n$. ▼

Пусть $A$ и $B$ — квадратные матрицы одного и того же порядка $n$. Матрица $AB - BA$ называется *коммутатором* матриц $A$ и $B$ и обозначается $[A, B]$. Очевидно, что матрицы $A$ и $B$ коммутируют тогда и только тогда, когда их коммутатор — нулевая матрица (порядка $n$). Легко проверить, что $[A, B] = -[B, A]$, поэтому $[A, B] = [B, A] \Leftrightarrow [A, B] = 0$, т.е. матрицы $A$ и $B$ коммутируют.

**Пример 6.** Вычислите коммутатор матриц $A$ и $B$, если:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

▲ 1) Имеем $AB = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 4 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 9 \\ 0 & -6 & 0 \\ 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, следовательно,

$$[A, B] = \begin{pmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

2) Имеем $AB = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = AB$, следовательно, матрицы $A$ и $B$ коммутируют, $[A,B] = 0$. ▼

**Пример 7.** Пусть $A$ и $B$ — квадратные матрицы порядка $n$. Докажите, что справедливы равенства: 1) $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$; 2) $\operatorname{tr}[A,B] = 0$.

▲ 1) Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда, в силу (1.9), сумма диагональных элементов матрицы $AB$ равна $\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{ri}$. Такая же сумма диагональных элементов $\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} b_{ir}a_{ri}$ и у матрицы $BA$. Следовательно, $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$.

2) В силу результата примера 6 §2 гл.1 и пункта 1), имеем: $\operatorname{tr}[A,B] = \operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr} AB - \operatorname{tr} BA = 0$. ▼

**Пример 8.** Докажите, что не существует матриц $A$ и $B$ таких, что $AB - BA = E$.

▲ В силу результата примера 7, $\operatorname{tr}[A,B] = 0$. С другой стороны, $\operatorname{tr} E = n$, где $n$ — порядок единичной матрицы $E$. Если бы для некоторых квадратных матриц $A$ и $B$ порядка $n$ выполнялось равенство $AB - BA = E$, то имело бы место также равенство $0 = \operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr} E = n$, что невозможно. ▼

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется *матричной единицей* с индексами $i_0 j_0$ (обозначение: $E_{i_0 j_0}$), если $a_{i_0 j_0} = 1$, $a_{ij} = 0$ для всех остальных пар индексов $(i,j) \neq (i_0, j_0)$.

**Пример 9.** Матрица $A$ перестановочна со всеми матричными единицами порядка $n$. Докажите, что $A$ — скалярная матрица.

▲ Как мы знаем (см. замечание после примера 3), $j$-ый столбец матрицы $AE_{ij}$ есть линейная комбинация столбцов матрицы $A$ с коэффициен-

тами, равными элементам $j$-го столбца матрицы $E_{ij}$. В силу определения матрицы $E_{ij}$, это означает, что $j$-ый столбец матрицы $AE_{ij}$ равен $i$-му столбцу $A$; все остальные столбцы $AE_{ij}$ — нулевые. Точно так же получаем, что у матрицы $E_{ij}A$ все строки нулевые, кроме $i$-ой, которая равна $j$-ой строке $A$. По условию для любых $i$ и $j$ выполняется равенство

$$AE_{ij} = E_{ij}A. \tag{1}$$

Взяв $i \neq j$, получаем из (1), что должны выполняться равенства $a_{ii} = a_{jj}$ и $a_{ji} = 0$, которые и означают, что $A$ — скалярная матрица. Заметим, что можно было сначала положить в (1) $i = j$ и доказать, что $A$ — диагональная матрица, а затем, положив в (1) $i \neq j$, доказать, что все ее диагональные элементы равны друг другу.

Из доказанного утверждения, в частности, следует, что только скалярная матрица порядка $n$ может коммутировать со *всеми* квадратными матрицами порядка $n$. ▼

Отметим некоторые свойства операции умножения матриц: если $A$, $B$, $C$ — матрицы, $\alpha$ — число, то

1°. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$.

2°. $(A+B)C = AC + BC$.

3°. $A(B+C) = AB + AC$.

Свойства 2° и 3° означают, что умножение дистрибутивно по отношению к сложению.

4°. $(AB)C = A(BC)$ (ассоциативность умножения).

Эти свойства следует трактовать так: если одна из частей равенства имеет смысл, то имеет смысл и другая, и они равны.

□ Свойства 1° — 3° очевидным образом следуют непосредственно из определений умножения матрицы на число (см. (1.3)), сложения и умножения матриц (см. (1.4) и (1.9)). Докажем свойство 4°.

Пусть $(AB)C$ имеет смысл и пусть $m$ есть число строк матрицы $A$, $k$ — число ее столбцов. Тогда $B$ имеет $k$ строк, ибо $AB$ имеет смысл. Пусть матрица $B$ имеет $l$ столбцов. Тогда и $AB$ имеет $l$ столбцов, так что для осмысленности $(AB)C$ нужно, чтобы $C$ имела $l$ строк. Итак, для осмысленности $(AB)C$ необходимо и достаточно, чтобы число столбцов матрицы $A$ равнялось числу строк матрицы $B$, а число столбцов матрицы $B$

равнялось числу строк матрицы $C$. Аналогично прослеживается, что те же условия необходимы и достаточны для осмысленности $A(BC)$. Остается доказать равенство $(AB)C = A(BC)$. Введем в рассмотрение матрицы $F = AB$, $G = (AB)C$, $D = BC$ и $H = A(BC)$, обозначая их элементы соответствующими строчными буквами.

Имеем $f_{iq} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} b_{pq}$, $d_{pj} = \sum_{q=1}^{l} b_{pq} c_{qj}$, поэтому

$$g_{ij} = \sum_{q=1}^{l} f_{iq} c_{qj} = \sum_{q=1}^{l} \left( \sum_{p=1}^{k} a_{ip} b_{pq} \right) c_{qj} = \sum_{q=1}^{l} \sum_{p=1}^{k} a_{ip} b_{pq} c_{qj},$$

$$h_{ij} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} d_{pj} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} \left( \sum_{q=1}^{l} b_{pq} c_{qj} \right) = \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=1}^{l} a_{ip} b_{pq} c_{qj}.$$

Мы видим, что $g_{ij} = h_{ij}$, ибо эти элементы представлены в виде сумм одинаковых слагаемых, только расположенных в разном порядке. ■

Доказанные свойства операции умножения матриц по индукции распространяются на любое конечное число слагаемых (сомножителей). Как обычно, свойство ассоциативности позволяет записывать произведение, содержащее более двух сомножителей, не используя скобки, например: $ABC$, $A_1 A_2 \ldots A_n$ и т.д.

Свойства 1° — 3° позволяют доказать, что если квадратная матрица $A$ порядка $n$ перестановочна со *всеми* матричными единицами $E_{ij}$ (соответствующего порядка), то она перестановочна с любой квадратной матрицей $B$ порядка $n$ (в частности, с любой диагональной матрицей, и, значит (пример 5), сама является диагональной). Действительно, представив $B = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} E_{ij}$, получаем:

$$AB = \sum_{i,j=1}^{n} A(b_{ij} E_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} (AE_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} (E_{ij} A) = \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij} E_{ij}) A = BA.$$

Выполняемые поэлементно операции умножения матрицы на число и сложения матриц представляются совершенно естественными. Данное же выше определение (1.9) умножения матриц на первый взгляд не кажется естественным. Это, однако, ошибочное впечатление. Данное определение умножения матриц совершенно естественно, в чем можно убедиться, если

связать матрицы с так называемыми *линейными преобразованиями* (*подстановками*) переменных. Поясним это понятие.

Пусть $A$ и $B$ — матрицы размеров $m \times k$ и $k \times n$ соответственно (т.е. такие, для которых определено произведение $AB$). Пусть $x_1, ..., x_k$ — набор исходных переменных, а $y_1, ..., y_m$ — другой, новый набор переменных, связанный с исходным набором формулами:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ ... \ + a_{1k}x_k, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ ... \ + a_{2k}x_k, \\ &\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ ... \ + a_{mk}x_k. \end{aligned} \tag{1.11}$$

В таком случае говорят, что формулы (1.11) задают линейное преобразование (подстановку) переменных $x_1, ..., x_k$ с коэффициентами, задаваемыми матрицей $A = (a_{ij})$. Аналогично, формулы

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}t_1 + b_{12}t_2 + \ ... \ + b_{1n}t_n, \\ x_2 &= b_{21}t_1 + b_{22}t_2 + \ ... \ + b_{2n}t_n, \\ &\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ x_k &= b_{k1}t_1 + b_{k2}t_2 + \ ... \ + b_{kn}t_n \end{aligned} \tag{1.12}$$

задают линейное преобразование переменных $t_1, ..., t_n$ с коэффициентами, заданными матрицей $B = (b_{ij})$.

Покажем, что если эти два преобразования сделать одно за другим, т.е. выразить переменные $y_1, ..., y_m$ через $t_1, ..., t_n$, то матрица коэффициентов получившегося линейного преобразования будет равна $AB$. Действительно, пусть

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}t_1 + c_{12}t_2 + \ ... \ + c_{1n}t_n, \\ y_2 &= c_{21}t_1 + c_{22}t_2 + \ ... \ + c_{2n}t_n, \\ &\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ y_m &= c_{m1}t_1 + c_{m2}t_2 + \ ... \ + c_{mn}t_n. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Тогда коэффициент $c_{ij}$ есть коэффициент при $t_j$ в выражении для $y_i$. Выпишем все необходимое для вычисления этого коэффициента:

$$
\begin{aligned}
y_i &= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ik}x_k, \\
x_1 &= \ldots + b_{1j}t_j + \ldots, \\
x_2 &= \ldots + b_{2j}t_j + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_k &= \ldots + b_{kj}t_j + \ldots .
\end{aligned}
\qquad (*)
$$

Подставив $x_1, x_2, \ldots, x_k$ в выражение для $y_i(*)$, получим:

$$
y_i = a_{i1}(\ldots + b_{1j}t_j + \ldots) + a_{i2}(\ldots + b_{2j}t_j + \ldots) + \ldots + a_{ik}(\ldots + b_{kj}t_j + \ldots) =
$$
$$
= \ldots + (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj})t_j + \ldots .
$$

Таким образом, $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$, так что матрица коэффициентов линейного преобразования (1.13) действительно равна $AB$. Итак, последовательному выполнению ("суперпозиции") двух линейных преобразований (подстановок) соответствует произведение их матриц коэффициентов.

Заметим, что линейное преобразование (1.11) можно записать в матричных обозначениях $Y = AX$, положив

$$
Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij}).
$$

Соответственно, преобразование (1.12) записывается в виде $X = BT$, где $T$ — столбец (высоты $n$) из $t_j$, $B = (b_{ij})$. Поэтому суперпозицию этих преобразований можно записать в виде $Y = A(BT)$. Вместе с тем матрица суперпозиции равна $AB$, и этот факт записывается так: $Y = (AB)T$. Таким образом, верно следующее важное соотношение ассоциативности:

$$
A(BT) = (AB)T \qquad (1.14)
$$

(где $T$ — столбец), которое позволяет по-другому доказать свойство 4° умножения матриц.

Пусть $P$ и $Q$ — две такие матрицы, что произведение $PQ$ имеет смысл. Пусть $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ — столбцы матрицы $Q$. Тогда столбцами матрицы $PQ$ являются $PQ_1, PQ_2, \ldots, PQ_k$, что непосредственно следует из определения умножения матриц. Это обстоятельство можно записать в виде

$$
P(Q_1, Q_2, \ldots, Q_k) = (PQ_1, PQ_2, \ldots, PQ_k).
$$

Обозначим через $C_1, C_2, \ldots, C_l$ столбцы матрицы $C$. Тогда

$$(AB)C = ((AB)C_1, (AB)C_2, ..., (AB)C_l).$$

Далее,

$$BC = (BC_1, BC_2, ..., BC_l) \text{ и } A(BC) = (A(BC_1), A(BC_2), ..., A(BC_l)).$$

Но, как было установлено выше (см. (1.14)), $(AB)C_1 = A(BC_1)$, $(AB)C_2 = A(BC_2)$, ..., $(AB)C_l = A(BC_l)$, ибо $C_1, C_2, ..., C_l$ — столбцы. Таким образом,

$$(AB)C = A(BC).$$

**Пример 10.** Выясните, определено ли произведение $ABC$, и если оно определено, то вычислите его:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = (1 \;\; 2)$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B = (1 \;\; 2)$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \end{pmatrix}$, $B = (-1 \;\; 3 \;\; 6 \;\; 17)$, $C = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

▲ 1) То, что данное произведение не определено, следует уже из того, что не определено произведение $AB$. Заметим, что произведение $BC$ определено и есть число 4, т.е. скалярная матрица порядка $n = 1$. Однако произведение $A(BC)$ не определено, поэтому не определено и произведение $ABC$.

2) Произведение $AB$ определено и равно $AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, произведение $(AB)C$ также определено, следовательно, произведение также и $ABC$ определено и равно $(AB)C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Можно рассуждать и так. Произведение $BC$ определено и есть число 4 (скалярная матрица порядка $n = 1$). Поскольку произведение $A(BC)$ определено, заключаем, что искомое произведение определено и равно $A(BC) =$ $= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot 4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$.

3) Данное произведение определено, поскольку определены произведения $AB$ и $(AB)C$ (а также $BC$ и $A(BC)$). Однако вычислять его как

$(AB)C$ неудобно: матрицу $AB$ размеров $2\times 4$ (которую надо еще вычислить!) придется умножать на столбец высоты 4. Удобнее и проще поступить следующим образом (ср. с пунктом 2)): матрица $BC$ есть число $(-1)\cdot(-5)+3\cdot 1+6\cdot 2+17\cdot(-1)=3$, поэтому данное произведение равно $A(BC)=\begin{pmatrix}7\\15\end{pmatrix}\cdot 3=\begin{pmatrix}21\\45\end{pmatrix}$. ▼

Пусть $n$ — целое неотрицательное число, $A$ — квадратная матрица порядка $m$. Определим понятие *степени* $A^n$ *матрицы* $A$ *с целым неотрицательным показателем* $n$, положив $A^0=E_m$, $A^1=A$, $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n\text{ сомножителей}}$ при $n\geq 2$. Из свойства ассоциативности умножения матриц следует, что *любые степени матрицы* $A$ *коммутируют*: $A^n\cdot A^k=A^k\cdot A^n$ для всех целых неотрицательных $n$ и $k$, при этом $A^n\cdot A^k=A^{n+k}$.

□ Рассмотрим матрицу $A^{n+k}$. По определению степени и в силу свойства ассоциативности умножения имеем:

$$A^{n+k}=\underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{n+k\text{ сомножителей}}=(\underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{n\text{ сомножителей}})\cdot(\underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{k\text{ сомножителей}})=A^n\cdot A^k,$$

$$A^{n+k}=(\underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{k\text{ сомножителей}})\cdot(\underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{n\text{ сомножителей}})=A^k\cdot A^n.$$

Следовательно,

$$A^n\cdot A^k=A^{n+k}=A^k\cdot A^n. \blacksquare \qquad (1.15)$$

**Пример 11.** Вычислите $A^n$, если:

1) $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $n=2$; 2) $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}$, $n=3$; 3) $A=\begin{pmatrix}3&2\\-4&-2\end{pmatrix}$, $n=5$;

4) $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $n=3$; 5) $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&2&0&0\\0&1&0&1&0\\1&0&0&0&1\end{pmatrix}$, $n=10$.

▲ 1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$. Совершенно аналогично проверяется, что для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

порядка $k$ справедливо равенство $A^2 = E_k$.

2) Имеем $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому $A^3 =$

$= A^2 \cdot A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$.

3) Имеем $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$, $A^3 = A^2 \cdot A =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, поэтому

$$A^5 = A^2 \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

4) Имеем

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— матричная единица $E_{14}$ четвертого порядка. Нетрудно проверить, что $A^4 = 0$, и что аналогичный результат имеет место для квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$ произвольного порядка $k$:

$$A^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ & & & & 0 \\ & & 0 & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = E_{ik}$$ — единичная матрица порядка $k$, $A^k = O$.

5) Имеем

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2A,$$

следовательно,

$$A^4 = (2A)^2 = 2^2 \cdot A^2 = 2^3 \cdot A,$$

$$A^8 = (2^3 A)^2 = 2^6 \cdot A^2 = 2^7 \cdot A,$$

$$A^{10} = A^8 \cdot A^2 = 2^7 A \cdot 2A = 2^8 \cdot A^2 = 2^9 A. \blacktriangledown$$

**Пример 12.** Вычислите $n$-ю степень матрицы $A$, если: 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

▲ 1) Имеем $A^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ (поскольку $A$ — верхняя треугольная матрица, все ее степени — верхние треугольные матрицы, см. пример 4), $A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$. Докажем методом математической индукции, что $A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$.

Для $n=1,2,3$ утверждение верно. Предположим, что оно верно для $n=k$. Тогда $A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&k+1\\0&1\end{pmatrix}$, т.е. в таком случае утверждение верно и для $n=k+1$. Следовательно, $A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$.

2) Имеем $A^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=2A$. Следовательно, $A^3=A^2\cdot A=2A\cdot A=2A^2=2^2A$. По индукции легко получаем, что $A^n=2^{n-1}A=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ (проведите доказательство самостоятельно).

3) Имеем $A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=A$. Следовательно,

$$A^n=A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

4) Имеем

$$A^2=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2\varphi-\sin^2\varphi&-2\sin\varphi\cos\varphi\\2\sin\varphi\cos\varphi&\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos2\varphi&-\sin2\varphi\\\sin2\varphi&\cos2\varphi\end{pmatrix}.$$

Докажем методом математической индукции, что $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$.

Для $n = 1, 2$ утверждение верно. Предположим, что оно верно для $n = k$. Тогда

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} \cos k\varphi & -\sin k\varphi \\ \sin k\varphi & \cos k\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos k\varphi \cdot \cos\varphi - \sin k\varphi \cdot \sin\varphi & -\cos k\varphi \cdot \sin\varphi - \sin k\varphi \cdot \cos\varphi \\ \sin k\varphi \cdot \cos\varphi + \cos k\varphi \cdot \sin\varphi & -\sin k\varphi \cdot \sin\varphi + \cos k\varphi \cdot \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\varphi & -\sin(k+1)\varphi \\ \sin(k+1)\varphi & \cos(k+1)\varphi \end{pmatrix},$$

т.е. в таком случае утверждение верно и для $n = k + 1$. Следовательно,

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}. \blacktriangledown$$

**Пример 13.** Докажите, что если $[A, B] = 0$, то справедливы матричные тождества:

1) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$; (1.16)

2) $(A+B)(A-B) = (A-B)(A+B) = A^2 - B^2$; (1.17)

3)* $(A+B)^n = A^n + C_n^1 A^{n-1}B + C_n^2 A^{n-2}B^2 + \ldots + C_n^i A^{n-i}B^i + \ldots$

$$\ldots + C_n^{n-1} AB^{n-1} + B^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i A^{n-i} B^i, \quad (1.18)$$

где $C_n^i = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$ — число сочетаний из $n$ элементов по $i$ (*матричная биномиальная формула*).

В частности, полагая $A = E$, получаем, что справедлива формула

$$(E+B)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i B^i = E + C_n^1 \cdot B + C_n^2 \cdot B^2 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot B^{n-1} + B^n. \quad (1.19)$$

□ 1) В силу свойств дистрибутивности 2° и 3° умножения матриц, имеем $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2$, и так как по условию $AB = BA$, то окончательно получаем: $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Тождество (1.16) доказано.

2) Имеем, аналогично пункту 1),

$$(A+B)(A-B)=A^2+BA-AB-B^2=A^2-B^2,$$

$$(A-B)(A+B)=A^2-BA+AB-B^2=A^2-B^2=(A+B)(A-B).$$

Тем самым (1.17) доказано.

3)* Покажем, что если матрицы $A$ и $B$ коммутируют, то коммутируют и любые их степени $A^p$ и $B^q$. Действительно,

$$A^pB=\underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{p\text{ сомножителей}}\cdot B=\underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{p-1\text{ сомножителей}}\cdot B\cdot A=\underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{p-2\text{ сомножителей}}\cdot B\cdot A^2=\ldots=BA^p,$$

поэтому

$$A^pB^q=(A^pB)B^{q-1}=(BA^p)B^{q-1}=B(A^pB^{q-1})=$$

$$=B^2(A^pB^{q-2})=\ \ldots\ =B^qA^p.$$

Доказательство (1.18) проведем методом математической индукции. Для $n=1$ формула (1.18), очевидно, верна. Предположим, что она доказана для $n=k$. Тогда, используя свойства операций над матрицами и учитывая перестановочность степеней $A$ и $B$, получаем:

$$(A+B)^{k+1}=(A+B)^k(A+B)=\left(\sum_{i=0}^{k}C_k^iA^{k-i}B^i\right)(A+B)=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}C_k^iA^{k+1-i}B^i+\sum_{i=0}^{k}C_k^iA^{k-i}B^{i+1}=\sum_{i=0}^{k}C_k^iA^{k+1-i}B^i+\sum_{i=1}^{k+1}C_k^{i-1}A^{k+1-i}B^i=$$

$$=A^{k+1}+\sum_{i=1}^{k}(C_k^i+C_k^{i-1})A^{k+1-i}B^i+B^{k+1}=$$

$$=C_{k+1}^0A^{k+1-0}B^0+\sum_{i=1}^{k}C_{k+1}^iA^{k+1-i}B^i+C_{k+1}^{k+1}A^{k+1-(k+1)}B^{k+1}=\sum_{i=0}^{k+1}C_{k+1}^iA^{k+1-i}B^i,$$

т.е. формула (1.18) верна в таком случае и для $n=k+1$ (в процессе преобразования выражения $(A+B)^{k+1}$ мы использовали известное комбинаторное тождество $C_k^i+C_k^{i-1}=C_{k+1}^i$, $1\le i\le k$ ). Утверждение п. 3) доказано. ■

**Пример 14.** Используя матричную биномиальную формулу, вычислите $n$-ю степень матрицы $C$, если: 1) $C=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$; 2) $C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

▲ 1) Полагая $C = E + B$, где $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, и учитывая, что $B^i = 0$ для $i \geq 2$ (пример 11, п. 4)), получаем в силу (1.19):

$$C^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i B^i = \sum_{i=0}^{1} C_n^i B^i = C_n^0 B^0 + C_n^1 B^1 = E + nB = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Полагая $C = E + B$, где $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, и учитывая, что $B^{2p} = E$, $B^{2p+1} = B$, $p \geq 0$ (пример 11, п. 1)), получаем в силу (1.19):

$$C^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i B^i = \sum_{i=0}^{n}{}' C_n^i \cdot E + \sum_{i=0}^{n}{}'' C_n^i \cdot B,$$

где сумма $\sum\limits_{i=0}^{n}{}'$ содержит слагаемые, отвечающие четным значениям индекса $i$, а сумма $\sum\limits_{i=0}^{n}{}''$ — нечетным. Как известно, сумма чисел $C_n^i$ по всем четным значениям $i$ равна сумме чисел $C_n^i$ по всем нечетным значениям $i$ и равна $2^{n-1}$ (поскольку $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$), следовательно,

$$C^n = 2^{n-1}(E + B) = 2^{n-1}C = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \ ▼$$

**Пример 15.** Пусть $A$ — треугольная матрица (верхняя или нижняя), $m$ — натуральное число. Вычислите след матрицы $A^m$.

▲ Пусть для определенности $A = (a_{ij})$ — верхняя треугольная матрица. Если $B = (b_{ij})$ — верхняя треугольная матрица, то диагональные элементы матрицы $C = AB$ равны, в силу (1.9), $c_{ii} = \sum\limits_{r=1}^{n} a_{ir} b_{ri}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $a_{ir} = 0$, если $r < i$, а $b_{ri} = 0$, если $r > i$. Значит, $c_{ii} = a_{ii} b_{ii}$, в частности, диагональные элементы матрицы $A^2$ равны $a_{ii}^2$. Рассуждая аналогич-

но, получаем, что диагональные элементы $A^m$ равны $a_{ii}^m$, следовательно, $\operatorname{tr} A^m = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^m$. ▼

## §4. Транспонирование матриц

Пусть $A = (a_{ij})$ — данная матрица размеров $m \times n$. Рассмотрим матрицу $B = (b_{ij})$ размеров $n \times m$, у которой элемент $b_{ij}$, стоящий на пересечении $i$ -ой строки и $j$ -го столбца, равен $a_{ji}$, т.е. для каждого $i = 1, 2, ..., n$ и $j = 1, 2, ..., m$ выполняется равенство

$$b_{ij} = a_{ji}. \tag{1.20}$$

Так построенная по матрице $A$ матрица $B$ называется *транспонированной* с матрицей $A$ (или: к матрице $A$) и обозначается $A^T$. Переход от матрицы $A$ к матрице $A^T$ называется *транспонированием* матрицы $A$. Ясно, что операция транспонирования применима к любой матрице $A$.

Соотношения (1.20) означают, что $i$ -ая строка ($j$ -ый столбец) матрицы $A^T$ состоит из тех же элементов (записанных при этом в том же порядке), что и $i$-ый столбец ($j$-ая строка) матрицы $A$. Таким образом, говоря неформально, но при этом и несколько неточно, операция транспонирования состоит в замене строк матрицы ее столбцами, а столбцов — строками.

Итак, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то транспонированная с ней матрица есть

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$