$AA^T = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}$, $A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix} \neq AA^T$. Но если A — *симметрическая* матрица, то $A = A^T$ и, естественно, $AA^T = AA = A^T A$.

ГЛАВА 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ (ДЕТЕРМИНАНТЫ) КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

§1. Перестановки и подстановки

Напомним, что *перестановкой* n элементов называется расположение этих элементов в определенном порядке. Нам понадобятся некоторые простейшие свойства совокупности перестановок n элементов. Переставляемыми элементами мы будем считать числа 1, 2, ..., n натурального ряда.

Предложение 1. *Число всех перестановок n элементов равно* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

□ Доказательство проведем методом математической индукции. Для $n = 1$ предложение очевидно. Пусть оно верно для $n = k - 1$. Совокупность перестановок k элементов разобьем на k частей в соответствии с положением элемента k на первом, втором, ..., n-ом месте. Тогда в каждой части в силу предположения индукции будет $(k-1)!$ перестановок, поскольку их число равно числу расположений элементов $1, 2, \ldots, k-1$ на $k-1$ свободных местах. Следовательно, общее число перестановок k элементов равно $k \cdot (k-1)! = k!$, т.е. предложение справедливо и для $n = k$. ■

Пусть $\sigma = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — некоторая перестановка чисел 1, 2, ..., n. Будем говорить, что пара элементов (α_i, α_j), где $i < j$, образует *инверсию* (*нарушает порядок*), если $\alpha_i > \alpha_j$. Число всех пар элементов перестановки σ, образующих инверсию, называется *числом инверсий* (*числом нарушений порядка*) в перестановке σ и обозначается $\operatorname{inv}\sigma = \operatorname{inv}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Перестановки, содержащие четное число инверсий, называются *четными*, содержащие нечетное число инверсий, — *нечетными*.

Пример 1. Найдите число инверсий в перестановке σ и определите ее четность, если:

1) $\sigma = (6\,4\,5\,2\,1\,3)$, а исходное расположение элементов — $1\,2\,3\,4\,5\,6$;

2) $\sigma = (3, 5, 1, 4, 2, 6, 8, 7)$, а исходное расположение элементов — $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$;

3) $\sigma = (n, n-1, n-2, ..., 1)$, а исходное расположение элементов — $1, 2, ..., n$.

▲ 1) Инверсии образуют пары (6, 4), (6, 5), (6, 2), (6, 1), (6, 3), (4, 2), (4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 1), (5, 3) и (2, 1), их число равно $\operatorname{inv}\sigma = 12$. Следовательно, перестановка σ четная.

2) Инверсии образуют пары (3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 4), (5, 2), (4, 2), (8, 7), их число равно $\operatorname{inv}\sigma = 7$. Следовательно, перестановка σ нечетная.

3) Если i и j — два элемента перестановки σ, причем i расположен левее j, то пара (i, j) образует инверсию. Число таких пар равно числу способов выбрать (без учета порядка выбора) 2 элемента из n, т.е. равно $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Следовательно, $\operatorname{inv}\sigma = \frac{n(n-1)}{2}$. Четность перестановки σ зависит от того, какой остаток при делении на 4 дает число n: если остаток равен 0 или 1, т.е. если число n имеет вид соответственно $4k$ или $4k+1$, то число $\frac{n(n-1)}{2}$ является четным (равным соответственно $2k(4k-1)$ или $2k(4k+1)$), поэтому в этих случаях перестановка σ является четной. Аналогично проверяется, что при $n = 4k+2$ и $n = 4k+3$ перестановка σ нечетная. ▼

Пример 2. Считая, что 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 — исходное расположение, подберите i и k так, чтобы:

1) перестановка $\sigma = (1, 2, 7, 4, i, 5, 6, k, 9)$ была четной;

2) перестановка $\sigma = (1, i, 2, 5, k, 4, 8, 9, 7)$ была нечетной.

▲ Очевидно, что σ будет перестановкой элементов $1, 2, ..., 9$, если $i = 3$, $k = 8$ или $i = 8$, $k = 3$. При этом в первом случае $\operatorname{inv}\sigma = 5$ (инверсии образуют пары (7,4), (7, 3),(7,5),(7,6) и (4,3)), т.е. σ — нечетная перестановка. Во втором случае $\operatorname{inv}\sigma = 10$ (инверсии образуют пары (7,4),(7,5),(7,6),(7,3),(4,3),(8,5),(8,6),(8,3),(5,3) и (6,3)), т.е. σ — четная перестановка. Следовательно, условию задачи удовлетворяет только второй случай $i = 8$, $k = 3$.

2) Аналогично п. 1) заключаем, что либо $i=3$, $k=6$, либо $i=6$, $k=3$. При этом в первом случае $\operatorname{inv}\sigma=5$, во втором — $\operatorname{inv}\sigma=8$, т.е. условию задачи удовлетворяет только первый случай. ▼

Подстановкой на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ называется взаимно однозначное отображение этого множества на себя. Удобно задавать подстановку σ в виде таблицы

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_k & \ldots & i_n \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

посредством записи образа под прообразом, т.е. для каждого элемента k прямо указывать элемент $i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, являющийся его образом. При этом порядок расположения столбцов в таблице (2.1), в принципе, совершенно безразличен. Так, таблица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ задает подстановку, при которой образами элементов 1, 2, 3, 4, 5 являются, соответственно, элементы 5, 1, 3, 2, 4. Ту же подстановку можно записать в виде таблицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. При указанной записи подстановки в верхней и нижней строках таблицы оказываются перестановки. Часто бывает удобно в верхней строке таблицы записывать элементы в их натуральном расположении, т.е. в порядке $1, 2, \ldots, n$ (но это, как указывалось, необязательно).

Последовательное выполнение двух подстановок приводит к подстановке, называемой их *произведением*, например:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \boxed{5} & 2 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \boxed{5} & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & \boxed{3} & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \boxed{3} & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(считаем, что первой действует та подстановка, что записана слева). Поскольку умножение подстановок является частным случаем умножения отображений, заключаем, что оно ассоциативно. *Тождественная* подстановка I, при которой каждому элементу сопоставляется он сам, играет в этом умножении роль единицы. Если в записи (2.1) подстановки σ верхнюю и нижнюю строки поменять местами, то получится *обратная* подстановка $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k & \ldots & i_n \\ 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & n \end{pmatrix}$, произведение которой на σ как в одном, так и в другом порядке дает, очевидно, тождественную подстановку.

Пример 3. Дана подстановка $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите σ^{-1} и проверьте, что $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = I$.

▲ По определению $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. В соответствии со сделанным замечанием, σ^{-1} удобно записать в виде следующей таблицы:

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим равенства $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = I$. Рассмотрим, например, элемент 1. Его образом при подстановке σ является 4, а образом 4 при подстановке σ^{-1} — элемент 1. Следовательно, при отображении $\sigma\sigma^{-1}$ образом 1 является 1. Точно так же проверяется, что образом 1 при отображении $\sigma^{-1}\sigma$ является 1 и аналогичные соотношения для элементов 2, 3, 4. ▼

Подчеркнем, что умножение подстановок некоммутативно, т.е. произведение зависит, вообще говоря, от порядка сомножителей, например, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, тогда как $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Заметим, что число всех возможных подстановок на множестве из n элементов равно числу всех возможных перестановок n элементов, т.е. равно $n!$ (ибо таково число возможных нижних строк таблицы при фиксированной верхней строке).

Подстановка называется *транспозицией*, если какие-то два элемента она меняет местами, а остальные $n-2$ элемента оставляет на своих местах. Например, транспозицией является подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, меняющая местами элементы 1 и 3. Такую транспозицию принято обозначать так: (1, 3). Пусть дана некоторая перестановка $\sigma = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ чисел $1, 2, ..., n$. Будем говорить, что перестановка $\tau = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ получена из σ транспозицией (α_i, α_j), если $\beta_i = \alpha_j$, $\beta_j = \alpha_i$ и $\beta_k = \alpha_k$ для $k \neq i, j$ (скажем также, что в перестановке σ сделана транспозиция (α_i, α_j)).

Справедливо следующее очевидное предложение.

Предложение 2. *Пусть в некоторой перестановке сделана транспозиция. Тогда она равна произведению нечетного числа транспозиций соседних элементов.*

□ Пусть в перестановке $\sigma = (a, b, ..., c, d, e, ..., f, g, h, ..., k, l)$ сделана транспозиция (c, h). Тогда, очевидно, справедливо равенство

$$(c, h) = \underbrace{(c, d)(c, e)...(c, f)(c, g)}_{k \text{ сомножителей}}(c, h)\underbrace{(g, h)(f, h)...(e, h)(d, h)}_{k \text{ сомножителей}},$$

где в правой части содержится *нечетное* число $2k+1$ сомножителей (каждая транспозиция τ, входящая в произведение, делается в перестановке, получившейся из σ после того, как в σ сделаны все транспозиции, расположенные в произведении левее τ, в частности, транспозиция (c, h) в правой части меняет местами *соседние* элементы c и h в перестановке

$$(a, b, ..., d, e, ..., f, g, c, h, ..., k, l)). \blacksquare$$

Предложение 3. *При транспозиции соседних элементов число инверсий в перестановке меняется на одну единицу.*

□ Нам нужно сравнить число инверсий в перестановках

$$(a, b, ..., c, d, e, f, ..., k, l)$$

и

$$(a, b, ..., c, e, d, f, ..., k, l).$$

Обозначим через i_1 и i_1' число инверсий в парах, не содержащих элементов d и e, в обеих перестановках соответственно; через i_2 и i_2' — число инверсий в парах, содержащих один из элементов d или e; через i_3 и i_3' — число инверсий в паре d, e и через i и i' — полное число инверсий. Ясно, что $i = i_1 + i_2 + i_3$, $i' = i_1' + i_2' + i_3'$.

Далее, очевидно, что $i_1 = i_1'$. Число i_2 тоже равно i_2', так как каждый из элементов d и e расположен относительно остальных элементов одинаковым образом в обеих перестановках. Наконец, если $i_3 = 0$, то $i_3' = 1$, и если $i_3 = 1$, то $i_3' = 0$. Поэтому $i' - i = i_1' + i_2' + i_3' - i_1 - i_2 - i_3 = i_3' - i_3 = \pm 1$, что и требовалось доказать. ■

Следствие 1. *Если в перестановке сделать транспозицию соседних элементов, то четность перестановки изменится на противоположную.*

Следствие 2. *Любая транспозиция изменяет четность перестановки на противоположную.*

□ Действительно, любая транспозиция равносильна нечетному числу транспозиций соседних элементов. ■

Предложение 4. *Число четных перестановок n элементов равно числу нечетных перестановок (и равно, следовательно, $\frac{n!}{2}$).*

□ Пусть число четных перестановок равно a, число нечетных равно b. Рассмотрим множество всех четных перестановок. Сделаем в них одну и ту же транспозицию, например, $(1, 2)$. Мы получим нечетные перестановки, попарно различные, в количестве a штук. Так как число всех нечетных перестановок равно b, заключаем, что $a \le b$. Теперь рассмотрим множество всех нечетных перестановок и сделаем в них транспозицию $(1, 2)$. Мы получим b четных перестановок и, следовательно, $b \le a$. Из установленных неравенств следует, что $a = b$, что и требовалось доказать.

Попутно мы получили, что если во всех четных перестановках сделать одну и ту же транспозицию, то мы получим все нечетные перестановки. ■

Предложение 5. *Любая перестановка может быть получена из любой другой посредством нескольких транспозиций.*

□ Применим индукцию. Для $n = 2$ утверждение тривиально. Пусть $n > 2$ и для перестановок $n - 1$ элемента предложение доказано. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ — две данные перестановки. Если $\beta_1 = \alpha_1$, то $(\alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $(\beta_2, ..., \beta_n)$ отличаются только порядком, и, в силу индукционного предположения, посредством нескольких транспозиций можно перейти от $(\alpha_2, ..., \alpha_n)$ к $(\beta_2, ..., \beta_n)$ и, следовательно, от $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ к $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$. Пусть $\beta_1 \ne \alpha_1$. Тогда $\beta_1 = \alpha_i$ при некотором $i \ne 1$. Сделав в перестановке $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ транспозицию (α_1, α_i), мы придем к новой перестановке, у которой на первом месте находится $\alpha_i = \beta_1$. В силу доказанного эта перестановка превращается в $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ посредством нескольких транспозиций. Следовательно, от $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ к $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ можно перейти посредством нескольких транспозиций, что и требовалось доказать.

В терминах подстановок предложение можно переформулировать так: любая подстановка может быть представлена в виде произведения транспозиций. ■

Пример 4. Дана тождественная перестановка $(1, 2, 3, 4)$. Несколькими различными способами получите из нее с помощью транспозиций перестановку $(4, 3, 2, 1)$.

▲ Используя только транспозиции соседних элементов, имеем:

1) $(1, 2, 3, 4) \to (1, 2, 4, 3) \to (1, 4, 2, 3) \to (4, 1, 2, 3) \to (4, 1, 3, 2) \to$
$\to (4, 3, 1, 2) \to (4, 3, 2, 1)$.

2) $(1, 2, 3, 4) \to (1, 3, 2, 4) \to (1, 3, 4, 2) \to (1, 4, 3, 2) \to (4, 1, 3, 2) \to$
$\to (4, 3, 1, 2) \to (4, 3, 2, 1)$.

При этом в обоих случаях нам понадобилось 6 транспозиций. Количество транспозиций можно уменьшить до двух, если разрешить использовать транспозиции несоседних элементов:

3) $(1, 2, 3, 4) \to (4, 2, 3, 1) \to (4, 3, 2, 1)$. ▼

Пример 4 показывает, что переход от одной перестановки к другой посредством транспозиций совершенно не однозначен. Однако в силу предложения 3 четность числа транспозиций, необходимых для такого перехода, инвариантна, а именно: при переходе от перестановки к другой перестановке той же четности число транспозиций обязательно четное (каждая транспозиция меняет четность перестановки на противоположную), а при переходе к перестановке противоположной четности требуется нечетное число транспозиций. Обе данные в условии примера 4 перестановки четные, поэтому в каждом из трех способов решения пришлось использовать четное число транспозиций (отсюда, в частности, следует, что 2 — это *минимальное* число транспозиций, необходимое для решения задачи).

Пример 5. Проверьте, что четности перестановок букв *ф, р, м, и, а, г, о, л,* если за исходное принять их расположения в словах:

1) логарифм; 2) алгорифм

одинаковы. Объясните результат.

▲ 1) Занумеруем буквы слова “логарифм” следующим образом:

л о г а р и ф м

1 2 3 4 5 6 7 8

Тогда данная перестановка примет вид $(7, 5, 8, 6, 4, 3, 2, 1)$, она является нечетной (число инверсий равно 25).

2) Аналогично, занумеровав буквы слова “алгорифм”:

а л г о р и ф м

1 2 3 4 5 6 7 8

и записав данную перестановку в виде $(7, 5, 8, 6, 1, 3, 4, 2)$, убеждаемся, что она также нечетная (число инверсий равно 21).

Совпадение четностей у двух данных перестановок объясняется тем, что одно исходное расположение букв получается из другого посредством четного числа транспозиций:

логарифм $\to$ лагорифм $\to$ алгорифм. ▼