§2. Определение детерминанта (определителя) порядка n

Определителем (*детерминантом*) квадратной матрицы порядка n

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

(обозначение: $\det A$, $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ или $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$) (2.3)

называется алгебраическая сумма всевозможных произведений элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца; при этом знак, с которым произведение входит в сумму, определяется по правилу: сомножители в каждом произведении записываются в порядке следования строк; тогда номера столбцов образуют перестановки; если перестановка четная, то произведение берется со знаком "плюс", а если нечетная, то со знаком "минус". Подчеркнем, что элементы матрицы A могут быть комплексными числами.

Таким образом, справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{\mathrm{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}. \tag{2.4}$$

Здесь $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ пробегает множество всех перестановок чисел $1, 2, \dots, n$; множитель $(-1)^{\mathrm{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}$ равен $+1$, если перестановка $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ четная, и равен -1, если эта перестановка нечетная.

В частности, для определителей 2-го и 3-го порядков, как легко проверить, имеем (ср. с §4 главы 2 раздела 1):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{2.5}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \tag{2.6}$$

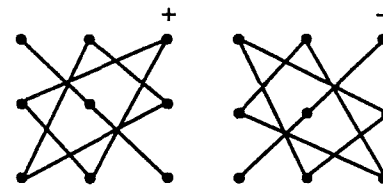
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Правило расстановки знаков в определителях 2-го и 3-го порядков можно схематически изобразить так:

$n = 2$

(2.7)

$n = 3$



На этих рисунках линиями соединены элементы матрицы, составляющие произведения, входящие в определитель со знаками, которые указаны справа вверху. Мы видим, что данное выше определение детерминанта порядка n действительно обобщает данные в §4 главы 2 раздела 1 определения детерминантов порядков $n = 2$ и $n = 3$.

Если дан определитель (2.3), то об элементах a_{k1}, a_{k2}, ..., a_{kn} говорят, что они образуют его k-ую строку (соответственно, элементы $a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{nm}$ образуют m-ый столбец).

Пример 1. Вычислите определитель квадратной матрицы A, если:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix};\ 2)\ A = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix};\ 3)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

▲ По формуле (2.5) имеем:

1) $\det A = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) - (2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5}) = (-1) - (-1) = 0.$

2) $\det A = 2i \cdot i - 1 \cdot (-1) = -2 + 1 = -1.$

3) По формуле (2.6) имеем:

$$\det A = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-2) \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \cdot 1 =$$
$$= 2 - 0 - 2 - 3 + 0 + 1 = -2. \ ▼$$

Пример 2. Решить относительно неизвестного λ уравнение $\det(A-\lambda E)=0$, где $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, E — единичная матрица 3-го порядка.

▲ Вычислив матрицу $A-\lambda E=\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 6-\lambda & 4 \\ -2 & -3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$, находим, что данное уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 6-\lambda & 4 \\ -2 & -3 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (1)$$

Выразив определитель в левой части уравнения (1) по формуле (2.6), получаем, что оно равносильно уравнению

$$(3-\lambda)(6-\lambda)(-1-\lambda)-(3-\lambda)\cdot 4\cdot(-3)=0, \text{ или } (3-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)=0.$$

Последнее уравнение имеет корни $\lambda_1=\lambda_2=3$ и $\lambda_3=2$. ▼

Пример 3. Пусть $A=(a_{ij})$ — произвольная квадратная матрица с комплексными элементами a_{ij} и $\overline{A}$ — матрица, комплексно сопряженная с A (элемент матрицы $\overline{A}$, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен $\overline{a}_{ij}$). Докажите, что справедливо равенство $\det\overline{A}=\overline{\det A}$.

▲ По формуле (2.4)

$$\det\overline{A}=\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}(-1)^{\operatorname{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}\overline{a}_{1\alpha_1}\overline{a}_{2\alpha_2}\ldots\overline{a}_{n\alpha_n}. \qquad (1)$$

По свойствам операции взятия комплексного сопряжения, правая часть равенства (1) равна

$$\overline{\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}(-1)^{\operatorname{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n}}=\overline{\det A}$$

(мы вновь использовали формулу (2.4)). ▼

Пример 4. 1) Выясните, входят ли в определитель 5-го порядка произведения $a_{15}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$ и $a_{55}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$. 2) С каким знаком в определитель 6-го порядка входит произведение $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$?

▲ 1) Первое произведение содержит два элемента a_{15} и a_{12} одной и той же, а именно, первой, строки. Это противоречит определению детерминанта. Следовательно, первое произведение в определитель не входит.

Записав множители второго произведения в порядке следования строк: $a_{1\underline{2}}a_{2\underline{1}}a_{3\underline{4}}a_{4\underline{3}}a_{5\underline{5}}$, убеждаемся, что номера столбцов, из которых выбирают элементы матрицы, образуют перестановку $(2, 1, 4, 3, 5)$ чисел $1, 2, 3, 4, 5$, как и полагается по определению детерминанта 5-го порядка. Следовательно, это произведение входит в определитель.

2) Записав данное произведение в виде $a_{1\underline{4}}a_{2\underline{3}}a_{3\underline{1}}a_{4\underline{2}}a_{5\underline{6}}a_{6\underline{5}}$, убеждаемся, что номера столбцов, из которых выбирают элементы матрицы, образуют четную перестановку $(4, 3, 1, 2, 6, 5)$. Следовательно, данное произведение входит в определитель со знаком "плюс". ▼

Пример 5. Подберите i и k так, чтобы произведение $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ входило в определитель 5-го порядка со знаком "плюс".

▲ Записав данное произведение в виде $a_{1i}a_{25}a_{32}a_{4k}a_{53}$, находим, что ему отвечает следующая перестановка номеров столбцов: $\sigma = (i, 5, 2, k, 3)$. Следовательно, имеются только две возможности выбора i и k так, чтобы рассматриваемое произведение входило в определитель: 1) $i=1$, $k=4$ или 2) $k=4$, $i=1$. В первом случае перестановка $\sigma_1 = (1, 5, 2, 4, 3)$ оказывается четной, и произведение входит в определитель со знаком "плюс". Во втором случае $\sigma_2 = (4,5,2,1,3)$ — нечетная перестановка, так что в этом случае произведение входит со знаком "минус" (то, что четности перестановок σ_1 и σ_2 различны, следует из следствия 2 предложения 3 §1: σ_2 получается из σ_1 с помощью одной транспозиции $(1,4)$). Итак, $i=1$, $k=4$. ▼

Рассмотренные примеры 4, п. 2) и 5 показывают, что часто бывает полезно узнавать, с каким знаком входит в определитель (2.3) слагаемое $a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\ldots a_{\alpha_n\beta_n}$, где $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ и $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ — две перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$. Ответ на этот вопрос дает общее правило знаков: *искомый знак равен* $(-1)^{\mathrm{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)+\mathrm{inv}(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)}$.

□ Для доказательства расположим сомножители в произведении $a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\ldots a_{\alpha_n\beta_n}$ в порядке следования строк. Заметим, что если поменять местами два сомножителя, то происходит транспозиция как в первых, так и во вторых индексах, так что число инверсий в первых индексах и число

инверсий во вторых индексах меняются на нечетные числа, и потому их сумма меняется на четное число. Поэтому $(-1)^{\mathrm{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)+\mathrm{inv}(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)}$ не изменяется при перемене мест двух сомножителей, а, следовательно, и при любом изменении порядка сомножителей, ибо любое изменение порядка равносильно нескольким попарным переменам мест. Отсюда следует требуемое. Действительно, пусть $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n$ — последовательность номеров столбцов после приведения сомножителей в порядок следования строк, так что $a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\ldots a_{\alpha_n\beta_n}=a_{1\gamma_1}a_{2\gamma_2}\ldots a_{n\gamma_n}$.

Тогда $(-1)^{\mathrm{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)+\mathrm{inv}(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)}=(-1)^{\mathrm{inv}(1,2,\ldots,n)+\mathrm{inv}(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)}=$ $=(-1)^{\mathrm{inv}(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)}$, а это и есть множитель ± 1, с которым интересующее нас слагаемое входит в состав определителя. ■

Пример 6. Докажите, что: 1) определитель диагональной матрицы равен произведению ее диагональных элементов; 2) определитель треугольной матрицы (как верхней, так и нижней) равен произведению ее диагональных элементов.

▲ 1) Пусть $A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)$ — данная диагональная матрица. Согласно определению, детерминант составляется из $n!$ произведений вида $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n}$, в которые в качестве сомножителей включается по одному элементу из каждой строки и из каждого столбца. Но у диагональной матрицы в i-й строке и в i-м столбце есть только один отличный (возможно) от нуля элемент — это $a_{ii}=\lambda_i$. Следовательно, именно он и должен быть выбран в качестве одного из сомножителей единственного произведения $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$, которое только и может быть отлично от нуля. При этом отвечающая этому произведению перестановка $(1,2,\ldots,n)$ — четная, поэтому оно входит в определитель со знаком "плюс". Окончательно имеем $\det A=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$.

2) Пусть для определенности

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$ — верхняя треугольная матрица.

Случай нижней треугольной матрицы рассматривается аналогично.

Согласно определению, в детерминант включаются с соответствующим образом выбранными знаками произведения элементов матрицы A,

взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Но в первом столбце матрицы A есть только один элемент, который может быть отличен от нуля, — это a_{11}. Его и следует выбрать, после чего ни из первого столбца, ни из первой строки уже нельзя будет выбирать элементы, значит, элементы надо выбирать из подматрицы A, образованной ее 2-й, ..., n-й строками и 2-м, ..., n-м столбцами, которая также является верхней треугольной. Рассуждая аналогичным образом, убеждаемся, что из первого столбца этой подматрицы (и, значит, второго столбца матрицы A) следует выбрать элемент a_{22}. И так далее. В результате получим произведение $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$, которое только и может быть отлично от нуля. Как уже отмечалось в пункте 1), оно входит в определитель со знаком "плюс".

Окончательно получаем $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Легко видеть, что утверждение пункта 1) есть частный случай доказанного утверждения. ▼

Пример 7. Вычислите определители $\begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & \ddots \; n \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ & 2 & a & \dots & a \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \ddots & a \\ & & & & n \end{vmatrix}$.

▲ В соответствии с результатом примера 6 оба данных определителя равны $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n = n!$ ▼

Пример 8. Вычислите определитель порядка n $\begin{vmatrix} & & & & 1 \\ & 0 & & 1 & \\ & & \iddots & & \\ & 1 & & 0 & \\ 1 & & & & \end{vmatrix}$.

▲ В i-й строке данного определителя есть только один отличный от нуля элемент — это $a_{i,n-i+1} = 1$, поэтому в определитель входит единственное произведение $a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\dots a_{n1} = 1$. Остается выяснить, с каким знаком это произведение входит в определитель, т.е. определить число инверсий в перестановке $(n, n-1, n-2, \dots, 2, 1)$. Как мы знаем (пример 1, п. 3, §1), $\operatorname{inv}(n, n-1, \dots, 2, 1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Следовательно, данный определитель равен $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. ▼

Пример 9. Выпишите в развернутой форме выражение для определителя 4-го порядка

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

▲ По определению D есть алгебраическая сумма $4!=24$ произведений вида $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}a_{3\alpha_3}a_{4\alpha_4}$, где $\sigma=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ — некоторая перестановка чисел 1,2,3,4. Знаки, с которыми произведения входят в алгебраическую сумму, определяются четностями перестановок σ.

Выпишем все перестановки σ, расположив их в 4 столбца по 6 перестановок в каждом в соответствии со значением первого элемента, при этом слева в скобках укажем число инверсий в перестановке, а справа — знак, с которым отвечающее этой перестановке произведение входит в определитель D. Получим:

$$\begin{array}{l|l|l|l} (0)\ 1\ 2\ 3\ 4\ (+) & (1)\ 2\ 1\ 3\ 4\ (-) & (2)\ 3\ 1\ 2\ 4\ (+) & (3)\ 4\ 1\ 2\ 3\ (-) \\ (1)\ 1\ 2\ 4\ 3\ (-) & (2)\ 2\ 1\ 4\ 3\ (+) & (3)\ 3\ 1\ 4\ 2\ (-) & (4)\ 4\ 1\ 3\ 2\ (+) \\ (1)\ 1\ 3\ 2\ 4\ (-) & (2)\ 2\ 3\ 1\ 4\ (+) & (3)\ 3\ 2\ 1\ 4\ (-) & (4)\ 4\ 2\ 1\ 3\ (+) \\ (2)\ 1\ 3\ 4\ 2\ (+) & (3)\ 2\ 3\ 4\ 1\ (-) & (4)\ 3\ 2\ 4\ 1\ (+) & (5)\ 4\ 2\ 3\ 1\ (-) \\ (2)\ 1\ 4\ 2\ 3\ (+) & (3)\ 2\ 4\ 1\ 3\ (-) & (4)\ 3\ 4\ 1\ 2\ (+) & (5)\ 4\ 3\ 1\ 2\ (-) \\ (3)\ 1\ 4\ 3\ 2\ (-) & (4)\ 2\ 4\ 3\ 1\ (+) & (5)\ 3\ 4\ 2\ 1\ (-) & (6)\ 4\ 3\ 2\ 1\ (+) \end{array} \qquad (2.8)$$

Теперь выпишем алгебраическую сумму D, расположив в ней произведения так же, как в (2.8) располагаются отвечающие им перестановки.

Получим:

$$D=\begin{array}{l} +a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} \\ -a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}+a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}+a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}+a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ +a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}+a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \\ +a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}+a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} \\ -a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}+a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}. \end{array} \qquad (2.9)$$ ▼

Формула (2.9) дает искомое развернутое выражение для определителя D 4-го порядка.

Преобразуем правую часть (2.9), представив ее в виде суммы четырех слагаемых:

$$D = S_{11} + S_{12} + S_{13} + S_{14}, \tag{1}$$

где S_{11} — сумма всех произведений в (2.9), в которые входит множитель a_{11}, S_{12} — сумма всех произведений, в которые входит множитель a_{12}, и т.д. Тогда в силу формулы (2.6) имеем:

$$S_{11} = a_{11}(a_{22}a_{33}a_{44} - a_{22}a_{34}a_{43} - a_{23}a_{32}a_{44} + a_{23}a_{34}a_{42} + a_{24}a_{32}a_{43} - a_{24}a_{33}a_{42}) =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Аналогично находим, что

$$S_{12} = -a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

$$S_{13} = a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

$$S_{14} = -a_{14} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Подставив выражения для $S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}$ из (2) — (5) в равенство (1), получим:

$$D = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} -$$

$$- a_{14} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}. \tag{2.10}$$

Равенство (тождество) (2.10) называется *формулой разложения определителя D по элементам его первой строки* (короче: по первой строке). Эта формула позволяет свести вычисление определителя 4-го порядка к вычислению нескольких (четырех) определителей 3-го порядка. Аналогич-

ные формулы справедливы для других строк определителя D, а также для его столбцов. Ниже будет показано (см. §4, свойство 6° определителей), что этот результат остается справедливым для определителя произвольного порядка n: вычисление такого определителя сводится к вычислению n определителей порядка $n-1$.

Укажем правило для запоминания правой части (2.10). Из первой строки определителя D последовательно, начиная с первого, выбираются элементы, которые умножаются на определители 3-го порядка, получающиеся из определителя D вычеркиванием его первой строки и того столбца, в котором содержится выбранный элемент. После этого из полученных выражений составляется знакочередующаяся сумма: выражение, содержащее первый элемент (первой) строки D, берется со знаком "плюс", содержащее второй элемент — со знаком "минус", и так далее.

Пример 10. Вычислите все слагаемые, входящие в состав определителя 4-го порядка со знаком "минус" и содержащие множителем a_{23}.

▲ Всего слагаемых, содержащих множителем a_{23}, — шесть (по два в первом, втором и четвертом столбцах в (2.9)), из них, согласно (2.9), со знаком "минус" в определитель входят три слагаемых: $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$, $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ и $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$. ▼

Пример 11. Вычислите определители 4-го порядка:

$$1)\ D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix};\ 2)\ D_2 = \begin{vmatrix} i & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

используя формулу (2.9).

▲ 1) Легко видеть, что в правой части (2.9) отличны от нуля только следующие три слагаемых: $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$, $a_{14}, a_{21}a_{32}a_{43}$ и $a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$. Следовательно,

$$D_1 = -a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} =$$
$$= -(-1)\cdot 1\cdot 4\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot(-2) + 2\cdot 1\cdot 4\cdot(-1) = 8 + 4 - 8 = 4.$$

2) В правой части (2.9) отличны от нуля только слагаемые $a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$, $a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$, $a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$ и $a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$, поэтому

$$D_2 = -a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} =$$
$$= -i\cdot i\cdot 1\cdot 1 + i\cdot(-i)\cdot 1\cdot 1 + (-i)\cdot i\cdot 1\cdot 1 - (-i)\cdot(-i)\cdot 1\cdot 1 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$ ▼

Пример 12. Вычислите определитель

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{vmatrix}.$$

▲ Вычисление D по формуле (2.9) приведет к сумме из 24-х слагаемых, каждое из которых равно $+1$ или -1. Эти вычисления можно несколько упростить, если воспользоваться формулой (2.10):

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}\equiv d_1-d_2+d_3-d_4,$$

где определители 3-го порядка d_i определяются очевидным образом. Теперь имеем по правилу (2.7):

$$d_1=1\cdot1\cdot1+(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)-(-1)\cdot1\cdot(-1)-$$
$$-1\cdot(-1)\cdot(-1)-(-1)\cdot(-1)\cdot1=1-1-1-1-1-1=-4,$$
$$d_2=1\cdot1\cdot1+(-1)\cdot(-1)\cdot1+(-1)\cdot1\cdot(-1)-(-1)\cdot1\cdot1-$$
$$-(-1)\cdot1\cdot1-1\cdot(-1)\cdot(-1)=1+1+1+1+1-1=4,$$
$$d_3=1\cdot(-1)\cdot1+(-1)\cdot1\cdot(-1)+1\cdot(-1)\cdot1-(-1)\cdot(-1)\cdot1-$$
$$-1\cdot(-1)\cdot(-1)-1\cdot1\cdot1=-1+1-1-1-1-1=-4,$$
$$d_4=1\cdot(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot1\cdot(-1)+1\cdot1\cdot1-(-1)\cdot(-1)\cdot1-$$
$$-1\cdot1\cdot(-1)-1\cdot1\cdot(-1)=1+1+1-1+1+1=4.$$

Следовательно, $D=(-4)-4+(-4)-4=-16$. ▼

Подведем некоторые итоги. Громоздкость формулы (2.9), выражающей определитель 4-го порядка через его элементы в явном виде, приводит к тому, что ее использование, т.е. вычисление определителя 4-го порядка непосредственно по определению, оказывается разумным только в специальных частных случаях, например, когда рассматриваемый определитель содержит некоторое количество нулей (как в примере 11) или имеет целые и не очень большие по модулю элементы (как в примере 12). Еще более безнадежным представляется вычисление непосредственно по определению более или менее произвольного определителя порядка $n>4$. (Не следует думать, что проблему можно легко решить, привлекая современные компьютеры; в самом деле, для вычисления определителя порядка n непосредственно по определению требуется выполнить $n!(n-1)$ умножений и

$n!-1$ сложений (вычитаний), что совершенно нереально при $n \sim 100$ (а такие значения n встречаются на практике).) Существуют, однако, приемы вычисления определителей, которые позволяют в некоторых случаях значительно упростить и сократить вычисления. Эти приемы основываются на тех или иных свойствах определителей. Некоторые из этих свойств будут рассмотрены в следующем параграфе.

§3. Свойства определителей

1°. *Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной.* (Другими словами — определитель не меняется при транспонировании матрицы: $\det A^T = \det A$.)

□ Действительно, брать произведения элементов по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца исходной матрицы — то же самое, что делать это по отношению к транспонированной матрице. Далее, номера строк для исходной — это номера столбцов для транспонированной, а номера столбцов исходной — суть номера строк транспонированной. Поэтому каждое слагаемое $a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\ldots a_{\alpha_n\beta_n}$ входит в состав определителя исходной матрицы и определителя транспонированной с одним и тем же множителем $(-1)^{\mathrm{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)+\mathrm{inv}(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)}$. ■

Установленное свойство означает, что в определителе строки и столбцы совершенно равноправны. Поэтому все дальнейшие свойства, устанавливаемые для строк, остаются справедливыми и для столбцов.

Пример 1. Докажите, что определитель n-го порядка, у которого каждый элемент a_{ik} является комплексно сопряженным элементу a_{ki}, равен действительному числу.

▲ Пусть A — матрица порядка n с элементами a_{ik}. По условию для всех $i, k = 1, 2, \ldots, n$ выполняется равенство $a_{ik} = \overline{a}_{ki}$, т.е. $A^T = \overline{A}$. В силу результата примера 3 из §2 этой главы $\det\overline{A} = \overline{\det A}$. По свойству 1° $\det A^T = \det A$. Следовательно, $\det A = \det A^T = \det\overline{A} = \overline{\det A}$, т.е. число $\det A$ — действительное. ▼

2°. *Если все элементы какой-либо строки определителя имеют общий множитель, то этот общий множитель можно вынести за знак определителя:*