

$n! - 1$ сложений (вычитаний), что совершенно нереально при $n \sim 100$ (а такие значения n встречаются на практике).) Существуют, однако, приемы вычисления определителей, которые позволяют в некоторых случаях значительно упростить и сократить вычисления. Эти приемы основываются на тех или иных свойствах определителей. Некоторые из этих свойств будут рассмотрены в следующем параграфе.

§3. Свойства определителей

1°. *Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной.* (Другими словами — определитель не меняется при транспонировании матрицы: $\det A^T = \det A$.)

□ Действительно, брать произведения элементов по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца исходной матрицы — то же самое, что делать это по отношению к транспонированной матрице. Далее, номера строк для исходной — это номера столбцов для транспонированной, а номера столбцов исходной — суть номера строк транспонированной. Поэтому каждое слагаемое $a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\dots a_{\alpha_n\beta_n}$ входит в состав определителя исходной матрицы и определителя транспонированной с одним и тем же множителем $(-1)^{\text{inv}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + \text{inv}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}$. ■

Установленное свойство означает, что в определителе строки и столбцы совершенно равноправны. Поэтому все дальнейшие свойства, устанавливаемые для строк, остаются справедливыми и для столбцов.

Пример 1. Докажите, что определитель n -го порядка, у которого каждый элемент a_{ik} является комплексно сопряженным элементу a_{ki} , равен действительному числу.

▲ Пусть A — матрица порядка n с элементами a_{ik} . По условию для всех $i, k = 1, 2, \dots, n$ выполняется равенство $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$, т.е. $A^T = \bar{A}$. В силу результата примера 3 из §2 этой главы $\det \bar{A} = \overline{\det A}$. По свойству 1° $\det A^T = \det A$. Следовательно, $\det A = \det A^T = \det \bar{A} = \overline{\det A}$, т.е. число $\det A$ — действительное. ▼

2°. *Если все элементы какой-либо строки определителя имеют общий множитель, то этот общий множитель можно вынести за знак определителя:*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ma_{i1} & \dots & ma_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

□ Действительно,

$$\sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} (-1)^{\text{inv}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} \dots (ma_{i\alpha_i}) \dots a_{n\alpha_n} =$$

$$= m \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} (-1)^{\text{inv}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} \dots a_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n} = m \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \blacksquare$$

Пример 2. Докажите, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен нулю.

▲ Пусть A — произвольная кососимметрическая матрица порядка n , т.е. $A^T = -A$. По свойству 1° $\det A^T = \det A$, по свойству 2° $\det(-A) = (-1)^n \det A$ (из каждой строки определителя матрицы $-A$ мы вынесли множитель $m = -1$). Следовательно,

$$\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A.$$

Поскольку n — нечетное число, отсюда следует, что $\det A = -\det A$, т.е. $\det A = 0$.

Подчеркнем, что утверждение неверно для определителя кососимметрической матрицы четного порядка. Рассмотрим, например, следующий определитель порядка 2n:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & \ddots \end{vmatrix}.$$

В этот определитель входит единственное произведение $a_{1,2n} a_{2,2n-1} \dots a_{n,n+1} a_{n+1,n} \dots a_{2n,1} = (-1)^n$ (ср. с примером 8 из §2 этой главы), при этом знак, с которым оно входит в определитель, равен $(-1)^{\text{inv}(2n, 2n-1, \dots, 2, 1)} = (-1)^{\frac{2n(2n-1)}{2}} = (-1)^{n(2n-1)} = (-1)^n$ (см. пример 1, п. 3 из §1 этой главы). Следовательно, $D = (-1)^n \cdot (-1)^n = 1 \neq 0$. ▶

3°. Если элементы какой-либо строки представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых элементы отмеченной строки равны первым слагаемым, во втором — вторым:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} + c_{i1} & \dots & b_{in} + c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$\square D = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} (-1)^{\text{inv}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} \dots (b_{i\alpha_i} + c_{i\alpha_i}) \dots a_{n\alpha_n} = \\ = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} (-1)^{\text{inv}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} \dots b_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n} + \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} (-1)^{\text{inv}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} \dots c_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ясно, что первая сумма равна

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказанное свойство естественным образом обобщается на случай, когда элементы строки представлены в виде суммы нескольких слагаемых. ■

Свойства 2° и 3° означают *линейность* определителя относительно элементов любой его строки (короче: линейность по любой строке). Следовательно, имеет место также линейность по любому столбцу определителя (см. замечание после свойства 1°).

Пример 3. Проверьте, что справедливо тождество

$$\begin{vmatrix} am + bp & an + bq \\ cm + dp & cn + dq \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}, \quad (2.11)$$

где a, b, c, d, m, n, p, q — произвольные (возможно, комплексные) числа.

□ Воспользуемся свойством 3° определителя, которое применим для разнообразия к столбцам. Тогда определитель в левой части (2.11) равен сумме

$$\begin{vmatrix} am & an + bq \\ cm & cn + dq \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bp & an + bq \\ dp & cn + dq \end{vmatrix} \quad (1)$$

(мы использовали линейность определителя по первому столбцу). Преобразуем каждое слагаемое в (1), используя линейность по второму столбцу. Имеем:

$$\begin{vmatrix} am & an + bq \\ cm & cn + dq \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} am & an \\ cm & cn \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} am & bq \\ cm & dq \end{vmatrix} = mn \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} + mq \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = mq \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

(мы применили свойство 2° по столбцам и воспользовались тем, что $\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} =$

$$= ac - ac = 0),$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} bp & an + bq \\ dp & cn + dq \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} bp & an \\ dp & cn \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bp & bq \\ dp & dq \end{vmatrix} = np \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} + pq \begin{vmatrix} b & b \\ d & d \end{vmatrix} = np \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = \\ &= np(bc - ad) = -np(ad - bc) = -np \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь из (1) следует, что левая часть (2.11) равна

$$mq \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - np \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot (mq - np) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix},$$

т.е. равна правой.

Приведем второе доказательство тождества (2.11), которое основано на вычислении определителя в левой части по формуле (2.5). Имеем:

$$\begin{vmatrix} am + bp & an + bq \\ cm + dp & cn + dq \end{vmatrix} = (am + bp)(cn + dq) - (an + bq)(cm + dp) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \underline{amcn} + bpcn + amdq + \underline{bpdq} - \underline{ancm} - bqcm - andp - \underline{bqdp} = \\
 &= bpcn + amdq - bqcm - andp = (bpcn - bqcm) + (amdq - andp) = \\
 &= bc(np - mq) + ad(mq - np) = (mq - np)(ad - bc) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Замечание. Обозначим $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$.

Тогда $AB = \begin{pmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{pmatrix}$, и тождество (2.11) принимает вид:

$$\det AB = \det A \cdot \det B, \quad (2.12)$$

т.е. определитель произведения двух квадратных матриц второго порядка равен произведению определителей этих матриц. Ниже будет показано (см. §5 этой главы), что этот результат справедлив для матриц любого порядка n . ■

4°. Если в матрице поменять местами две строки, то ее определитель изменит знак на противоположный.

Следствие 1. Определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю.

Следствие 2. Определитель с двумя пропорциональными строками равен нулю.

□ Докажем свойство 4°. Пусть

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ и } D' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad i < k.$$

Возьмем какое-нибудь слагаемое из второго определителя D' , записанное в порядке следования его строк:

$$a_{1\alpha_1} \dots a_{k\alpha_i} \dots a_{i\alpha_k} \dots a_{n\alpha_n}.$$

Оно входит в D' с множителем $(-1)^{\operatorname{inv}(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n)}$. Но

$$a_{1\alpha_1} \dots a_{k\alpha_i} \dots a_{i\alpha_k} \dots a_{n\alpha_n} = a_{1\alpha_1} \dots a_{i\alpha_k} \dots a_{k\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n},$$

так что в D оно входит с множителем $(-1)^{\text{inv}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)}$. Поскольку $(-1)^{\text{inv}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)} = -(-1)^{\text{inv}(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n)}$ (перестановки отличаются транспозицией), каждое слагаемое из D' входит в D с противоположным знаком, т.е. $D' = -D$. ■

□ Докажем следствие 1. Пусть в определителе D имеются две одинаковые строки. Поменяем их местами. Тогда, в силу свойства 4° , он должен изменить знак, но вместе с тем он не изменится. Следовательно, $D = -D$, т.е. $D = 0$. ■

□ Докажем следствие 2. Пусть в определителе D имеются две пропорциональные строки и k — коэффициент пропорциональности. Вынесем на основании свойства 2° k за знак определителя. Тогда в получившемся определителе будут две равные строки, и на основании следствия 1 он равен нулю. Следовательно, равен нулю и определитель D . ■

Пример 4. Вычислите определитель

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 7 \\ 1 & 8 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

▲ Поменяем местами последнюю, пятую строку D последовательно с его четвертой, третьей, второй и первой строками. На основании свойства 4° заключаем, что определитель при этом не изменится (мы 4 раза изменили знак D). Итак,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

Теперь переставим последнюю и предпоследнюю строки у получившегося определителя, тогда на основании свойства 4° заключаем, что определитель изменил знак:

$$D = - \begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot (-1) \cdot (-3) = -36$$

(мы воспользовались результатом примера 6, п. 2 из §2 этой главы). ▼

Пример 5. Вычислите определитель:

$$1) D_1 = \begin{vmatrix} -7 & 11 & 1 \\ 3 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}; 2) D_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 7 & 12 \\ -3 & 9 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 14 & 25 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

▲ 1) Представим элементы матрицы второй строки определителя D_1 следующим образом в виде суммы двух слагаемых: $3 = 3 + 0$, $5 = 4 + 1$, $5 = 5 + 0$ и воспользуемся свойством 3° . Получим:

$$D_1 = \begin{vmatrix} -7 & 11 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -7 & 11 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 11 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

(мы воспользовались следствием 1 свойства 4°).

Последний определитель вычислим по формуле (2.6):

$$\begin{vmatrix} -7 & 11 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = (-7) \cdot 1 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 3 = -38.$$

2) Имеем по свойству 2° , примененному к первой строке D_2 :

$$2D_2 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 14 & 24 \\ -3 & 9 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 14 & 25 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Мы видим, что элементы третьей строки получившегося определителя представляются в виде суммы двух слагаемых, являющихся соответствующими элементами его первой и последней строк: $2 = 0 + 2$, $1 = (-2) + 3$, $14 = 14 + 0$, $25 = 24 + 1$.

На основании свойства 3° заключаем, что

$$2D_2 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 14 & 24 \\ -3 & 9 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 14 & 24 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -2 & 14 & 24 \\ -3 & 9 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

(каждый из определителей, входящих в сумму, содержит по две одинаковые строки и потому равен нулю в силу следствия 1 свойства 4°). ▼

Пример 6. Докажите, что справедливо тождество:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

▲ Обозначим определитель в левой части через D . Применим свойство 3° к первому столбцу D , получим

$$D = \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \equiv d_1 + d_2,$$

где определители d_i определяются очевидным образом. Для вычисления d_1 снова применим свойство 3°, но теперь к третьему столбцу:

$$d_1 = \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c+a & b \\ b_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

(мы использовали следствие 1 свойства 4°). Снова применяя свойство 3°, а затем следствие 1 свойства 4°, получаем окончательно:

$$d_1 = \begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Переставив в последнем определителе третий столбец последовательно со вторым и с первым, получим, учитывая свойство 4°, что

$$d_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Совершенно аналогично получаем, что и d_2 равен тому же самому определителю, что завершает доказательство. ▼

5°. Определитель не изменится, если к какой-либо его строке прибавить числа, пропорциональные другой строке.

□ Действительно, по свойствам 3° и 4° (следствие 2) имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + ma_{k1} & \dots & a_{in} + ma_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ma_{k1} & \dots & ma_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. ■$$

Следствие 1. Определитель не изменится, если к какой-либо его строке прибавить линейную комбинацию других строк (по поводу определения линейной комбинации строк см. §2 гл. 1 этого раздела).

Следствие 2. Определитель равен нулю, если какая-либо его строка является линейной комбинацией других строк.

□ Пусть α_i — коэффициенты, с которыми входят в указанную линейную комбинацию строки данного определителя. Прибавим к рассматриваемой строке линейную комбинацию других строк с коэффициентами, соответственно равными $-\alpha_i$. По свойству 5 (следствие 1), определитель не изменится. Вместе с тем, в получившемся определителе одна строка нулевая, т.е. он равен нулю, следовательно, равен нулю и данный определитель.

Можно рассуждать и так. По свойству 3°, примененному к рассматриваемой строке, данный определитель равен сумме нескольких определителей, каждый из которых имеет по две пропорциональные строки и, следовательно, равен нулю (следствие 2 свойства 4°). Значит, равен нулю и данный определитель. ■

Пример 7. Числа 1081, 1403, 2093 и 1541 делятся на 23. Объясните без вычислений, почему число

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

также делится на 23.

▲ Прибавив к четвертому столбцу данного определителя линейную комбинацию его первого, второго и третьего столбцов с коэффициентами, соответственно равными $\alpha_1 = 1000$, $\alpha_2 = 100$ и $\alpha_3 = 10$, получим в силу следствия свойства 5° равный определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1081 \\ 1 & 4 & 0 & 1403 \\ 2 & 0 & 9 & 2093 \\ 1 & 5 & 4 & 1541 \end{vmatrix},$$

в котором элементы последнего, четвертого столбца по условию делятся на 23. Остается применить свойство 2° и заметить, что определитель, все элементы которого являются целыми числами, равен целому числу. ▼

Доказанное свойство 5° позволяет по-другому вычислить некоторые из определителей, рассмотренные выше. Вернемся к определителю

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

из примера 12 §2.

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на -1 , затем к третьей прибавим первую, умноженную на -1 , и затем к четвертой прибавим первую, умноженную на -1 . Получим равный определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Теперь прибавим к четвертой строке полученного определителя линейную комбинацию с коэффициентами $\alpha_2 = -1$ и $\alpha_3 = -1$ его второй и третьей строк. Получим равный определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot 4 = -16$$

(мы применили свойство 4° и воспользовались результатом примера 6 из §2 этой главы).

Рассмотрим определитель D из примера 6 этого параграфа. Как показано, $D = d_1 + d_2$, где

$$d_1 = \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix},$$

а определитель d_2 получается из d_1 заменой чисел b , b_1 , b_2 соответственно на c , c_1 , c_2 . Для вычисления определителя d_1 вычтем из его третьего столбца первый, получим равный определитель

$$\begin{vmatrix} b & c+a & a \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из второго столбца этого определителя его третий столбец, получим равный определитель

$$\begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix},$$

который двумя перестановками столбцов приводится к виду

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Последний определитель, следовательно, равен d_1 . Определитель d_2 вычисляется аналогично.

Заметим, наконец, что равенство нулю определителя D_2 из пункта 2 примера 5 этого параграфа сразу следует из следствия 2 свойства 5°: третья строка D_2 является линейной комбинацией его первой и четвертой строк с коэффициентами $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_4 = 1$ соответственно.