Аналогично можно доказать, что

$$\widetilde{W}_n(a_1,a_2,...,a_n)=\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & ... & a_n^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & ... & a_n^2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j). \tag{2.27}$$

Впрочем, этот результат можно получить и по-другому: достаточно заметить, что $\widetilde{W}_n$ получается из $W_n$ перестановкой строк, и учесть, что при перестановке двух строк определитель меняет знак. В самом деле, $\widetilde{W}_n$ можно получить из $W_n$, если последовательно поменять местами последнюю строку $W_n$ со всеми предыдущими, затем предпоследнюю со всеми предыдущими и т.д., т.е. сделав $(n-1)+(n-2)+...+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$ перемен знака. Но число сомножителей в (2.25) также равно $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Заменив каждый из сомножителей $a_i-a_j$ на $a_j-a_i$, получим произведение (2.27). Заметим еще, что поскольку определитель не меняется при транспонировании, справедливо равенство

$$W_n(a_1,a_2,...,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & ... & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & ... & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & ... & a_3^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & ... & a_n^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{2.28}$$

## §5. Миноры и их алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Определитель произведения двух квадратных матриц. Теорема Бине-Коши

Напомним, что если в некоторой матрице выбраны несколько строк и несколько столбцов, то элементы, находящиеся на пересечениях выбранных строк и столбцов, составляют матрицу, называемую подматрицей (субматри-

цей) для исходной. Определители квадратных подматриц носят название *миноров* исходной матрицы. Если исходная матрица является квадратной, то говорят также, что ее миноры являются минорами ее определителя. Таким образом, если

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

— данная квадратная матрица порядка $n$, то ее минором порядка $k$, $1 \le k \le n-1$ (минором порядка $k$ ее определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}), \tag{2.30}$$

отвечающим строкам с номерами $i_1, \dots, i_k$ $(i_1 < \dots < i_k)$ и столбцам с номерами $j_1, \dots, j_k$ $(j_1 < \dots < j_k)$, является определитель

$$M = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_k j_1} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}. \tag{2.31}$$

Можно сказать также, что минор порядка $k$ есть определитель, получающийся после вычеркивания в данном определителе (2.30) порядка $n$ некоторых $n-k$ строк и некоторых $n-k$ столбцов. В частности, после вычеркивания в определителе (2.30) одной строки с номером $i$ и одного столбца с номером $j$ получается минор $M_{ij}$ порядка $n-1$, а минорами первого порядка являются отдельные элементы $a_{ij}$ определителя.

*Дополнительным минором* к данному минору $M$ порядка $k$ определителя (2.30) называется минор $M'$ порядка $n-k$ этого определителя, получающийся вычеркиванием строк и столбцов, содержащих минор $M$. Очевидно, что если минор $M'$ — дополнительный для минора $M$, то минор $M$ — дополнительный для $M'$, так что можно говорить о паре взаимно дополнительных миноров определителя. В частности, элемент $a_{ij}$ и минор $M_{ij}$ порядка $n-1$, получающийся вычеркиванием в определителе $i$-й строки и $j$-го столбца, составляют пару взаимно дополнительных миноров.

*Алгебраическим дополнением* $A$ минора $M$ (или к минору $M$) называется его дополнительный минор $M'$ с множителем $(-1)^{S_M}$, где $S_M = i_1 + \ldots + i_k + j_1 + \ldots + j_k$ — сумма номеров строк и столбцов, в которых расположен минор $M$, т.е.

$$A = (-1)^{S_M} M'. \tag{2.32}$$

Справедлива теорема, которая является глубоким обобщением теоремы о разложении определителя по элементам строки (столбца) и утверждает возможность аналогичного разложения определителя по элементам нескольких строк (столбцов).

Теорема Лапласа. *Пусть в определителе $D$ порядка $n$ произвольно выбраны $k$ строк (или $k$ столбцов), $1 \le k \le n-1$. Тогда сумма произведений всех миноров $k$-го порядка, содержащихся в выбранных строках (соответственно, столбцах), на их алгебраические дополнения равна определителю $D$.*

**Пример 1.** Напишите разложение определителя четвертого порядка

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{2.33}$$

по минорам первых двух строк.

▲ Имеем по теореме Лапласа

$$\begin{aligned} D_4 = &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} - \\ &- \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{2.34}$$ ▼

**Пример 2.** Выясните, сколько миноров $k$-го порядка содержится в выделенных $k$ строках (столбцах) определителя порядка $n$. Сколько всего миноров $k$-го порядка содержит определитель порядка $n$?

▲ В выделенных $k$ строках определителя порядка $n$ содержится столько миноров порядка $k$, сколько существует способов выбрать $k$ столбцов в матрице размеров $k \times n$, т.е. $C_n^k$. Поскольку из имеющихся $n$

строк (данного определителя порядка $n$) можно выбрать $k$ строк $C_n^k$ различными способами, заключаем, что всего в определителе порядка $n$ имеется $C_n^k \cdot C_n^k = (C_n^k)^2$ миноров порядка $k$. ▼

**Пример 3.** Покажите, что разложение Лапласа определителя порядка $n$ по любым $k$ строкам (столбцам) совпадает с его разложением по остальным $n-k$ строкам (столбцам). (В случае $n=4$, $k=2$ это следует из (2.33) — (2.34), если рассматриваются первые две строки определителя (2.33).)

▲ Пусть $M$ — произвольный минор порядка $k$, содержащийся в рассматриваемых $k$ строках, $M'$ — дополнительный к нему минор порядка $n-k$, содержащийся в остальных $n-k$ строках, $A$ и $A'$ — алгебраические дополнения миноров $M$ и $M'$ соответственно. Разложение Лапласа по рассматриваемым $k$ строкам представляет собой сумму всевозможных слагаемых вида $M \cdot A$, по остальным $n-k$ строкам — сумму всевозможных слагаемых вида $M' \cdot A'$. По формуле (2.32) имеем

$$A = (-1)^{S_M} M', \; A' = (-1)^{S_{M'}} M$$

(миноры $M$ и $M'$ являются взаимно дополнительными друг к другу). Таким образом, достаточно проверить, что $(-1)^{S_M} = (-1)^{S_{M'}}$, т.е. что четности чисел $S_M$ и $S_{M'}$ одинаковы.

Пусть $i_1, ..., i_k$ — номера строк, $j_1, ..., j_k$ — номера столбцов, в которых расположен минор $M$. Тогда $S_M = i_1 + ... + i_k + j_1 + ... + j_k$. Сумма номеров всех $n$ строк (столбцов) равна $1 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Следовательно,

$$S_{M'} = \left(\frac{n(n+1)}{2} - (i_1 + ... + i_k)\right) + \left(\frac{n(n+1)}{2} - (j_1 + ... + j_k)\right) = n(n+1) - S_M,$$

т.е. $S_{M'} + S_M = n(n+1)$ — четное число, и, значит, четности чисел $S_{M'}$ и $S_M$ одинаковы. ▼

Доказательство теоремы Лапласа в общем случае приведено в книге [2]. Здесь мы ограничимся доказательством теоремы в важном для приложений частном случае определителя так называемой *ступенчатой* матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & 0 & \dots & 0 \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \dots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2.35)$$

Применим к определителю матрицы (2.35) теорему Лапласа, исходя из первых $m$ строк. Очевидно, что лишь один минор будет отличен от нуля, именно, левый верхний, а его алгебраическим дополнением будет минор, составленный из последних $n-m$ строк и столбцов. Следовательно, справедливо равенство

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2.36)$$

Докажем равенство (2.36), которое и составляет содержание теоремы об определителе ступенчатой матрицы.

□ Воспользуемся методом математической индукции. При $m=1$ утверждение очевидно (свойство 6° определителей). Проведем индукцию по порядку $m$ минора из левого верхнего угла, допустив, что для левого верхнего углового минора порядка $m-1$ утверждение верно. Обозначим через $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1m}$ — алгебраические дополнения, а через $\delta_{11}, \delta_{12}, \dots, \delta_{1m}$ — соответствующие миноры элементов первой строки определителя $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$. Пусть $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ — алгебраические дополнения, а $M_{11}, M_{12}, \dots, M_{1n}$ — соответствующие миноры в определителе $\det A$. Разложим определитель $\det A$ по элементам первой строки:

$$\det A=a_{11}A_{11}+\dots+a_{1m}A_{1m}=$$

$$=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\dots+(-1)^{m+1}a_{1m}M_{1m}=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}a_{1k}M_{1k}.$$

Рассмотрим минор $M_{1k}$. Его матрица получается вычеркиванием первой строки и $k$-го столбца из матрицы $A$ (2.35) и снова является ступенчатой. Ее левый верхний угловой минор имеет порядок $m-1$, и его матрица есть результат вычеркивания первой строки и $k$-го столбца из матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$. При этом правый нижний угловой минор такой же, как у матрицы $A$. В силу предположения индукции

$$M_{1k} = \delta_{1k} \cdot \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

поэтому по свойству 6° определителей

$$\det A = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} a_{1k} \delta_{1k} \cdot \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{1k} \alpha_{1k} \cdot \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \blacksquare$$

Замечание. Пусть в определителе $D$ четного порядка $n = 2k$ выделены четыре угловых минора $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ порядка $k$, как показано на схеме:

$$\begin{array}{c} \qquad M_1 \qquad\qquad\qquad M_2 \\ \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ \hline a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right| \\ \qquad M_3 \qquad\qquad\qquad M_4 \end{array} = \begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix}.$$

Если все элементы $M_2$ равны нулю, то по доказанному $D = M_1 M_4$. Тот же результат получим, если все элементы $M_3$ равны нулю. Действительно, поскольку определитель не меняется при транспонировании, имеем:

$$D = D^T = \begin{vmatrix} M_1^T & M_3^T \\ M_2^T & M_4^T \end{vmatrix} = M_1^T \cdot M_4^T = M_1 M_4.$$

Пусть теперь все элементы $M_1$ равны нулю. Поменяем последовательно местами 1-й столбец определителя $D$ с его $(k+1)$-м столбцом, затем 2-й столбец — с $(k+2)$-м столбцом, ..., $k$-й столбец — с $n$-м столбцом, после чего получится определитель $\begin{vmatrix} M_2 & O \\ M_4 & M_3 \end{vmatrix} = M_2 M_3$, отличающийся от определителя $D$ множителем $(-1)^k$, и мы окончательно получаем:

$$\begin{vmatrix} O & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix} = (-1)^k M_2 M_3. \qquad (1)$$

Тот же результат получается в случае, когда все элементы $M_4$ равны нулю. Все полученные результаты немедленно следуют из общей теоремы Лапласа, если ее применить к строкам, содержащим минор $M_i$, все элементы которого равны нулю. Например, в случае определителя (1) имеем:

$$\begin{vmatrix} O & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix} = (-1)^{S_{M_2}} M_3 M_2 = (-1)^k M_3 M_2,$$

поскольку $S_{M_2} = 1 + \ldots + k + (k+1) + \ldots + 2k = k + 2k^2$ имеет ту же четность, что и $k$.

Теорема Лапласа позволяет сводить вычисление определителя $n$-го порядка к вычислению нескольких определителей порядков $k$ и $n-k$. Этих новых определителей будет, вообще говоря, весьма много. Действительно, в примере 2 показано, что в общем случае придется вычислить $C_n^k$ определителей порядка $k$ и, следовательно, еще столько же определителей порядка $n-k$, т.е. всего $2C_n^k$ определителей. Числа $C_n^k$ быстро растут с ростом $n$: если при $n = 4$, $k = \frac{n}{2} = 2$ нужно вычислить 12 определителей второго порядка (см. (2.34)), то уже при $n = 6$, $k = \frac{n}{2} = 3$ приходится вычислять $2C_6^3 = 40$ определителей третьего порядка! Ясно поэтому, что применять теорему Лапласа целесообразно лишь в том случае, если в определителе можно так выбрать $k$ строк (или столбцов), что многие из миноров $k$-го порядка, расположенные в этих строках, будут равны нулю. Этим замечанием мы уже воспользовались, когда вычисляли определитель ступенчатой матрицы (2.35). Рассмотрим некоторые другие примеры.

**Пример 4.** Докажите, что определитель матрицы $A$ порядка $n$ равен нулю, если в ней имеется нулевая подматрица размеров $k \times l$, где $k + l > n$.

▲ Применим теорему Лапласа к $k$ строкам матрицы $A$, в которых располагается нулевая подматрица. Поскольку $k > n - l$, каждый минор порядка $k$, расположенный в этих строках, будет равен нулю, ибо он содержит хотя бы один столбец данной нулевой подматрицы. Следовательно, равно нулю каждое произведение, входящее в сумму, которая участвует в теореме Лапласа и которая равна $\det A$. ▼

**Пример 5.** Вычислите определитель

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -8 & 10 & 9 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

▲ Матрица определителя $D$ пятого порядка содержит нулевую подматрицу размеров $3 \times 3$, расположенную в 1-й, 3-й, 4-й строках и 1-м, 4-м, 5-м столбцах. Поскольку $3 + 3 = 6 > 5$, на основании результата примера 4 заключаем, что $D = 0$. ▼

**Пример 6.** Вычислите определитель $D$ четвертого порядка, пользуясь разложением по минорам второго порядка:

$$\text{а) } D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

▲ а) Воспользуемся формулой (2.34). Отличными от нуля будут миноры $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$. Им соответствуют дополнительные миноры $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Следовательно, в сумме (2.34) отличны от нуля только первые два слагаемые:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5.$$

б) Применим теорему Лапласа ко второй и четвертой строкам, при этом отличным от нуля будет только один минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, расположенный

во втором и четвертом столбцах, которому соответствует дополнительный минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$. Следовательно,

$$D=(-1)^{2+4+2+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=(-3)\cdot(-3)=9. \blacktriangledown$$

**Пример 7.** Вычислите определитель

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}.$$

▲ Воспользуемся разложением Лапласа по второй и третьей строкам:

$$D=(-1)^{2+3+1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b & c \\ 0 & z \end{vmatrix}+(-1)^{2+3+1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & y \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a & c \\ 0 & z \end{vmatrix}+(-1)^{2+3+2+3}\cdot\begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 0 & c \\ 1 & z \end{vmatrix}=$$

$$=-x\cdot bz-y\cdot az+xy\cdot(-c)=-(xyc+xbz+ayz). \blacktriangledown$$

**Пример 8.** Вычислите определитель $D$ пятого порядка:

$$\text{а) } D=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } D=\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix};$$

$$\text{в) } D=\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

▲ а) Применим теорему Лапласа ко второй и пятой строкам:

$$D=(-1)^{2+5+1+3}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}=-(-5)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из третьего столбца получившегося определителя 3-го порядка его первый столбец:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \cdot 2 = 2.$$

Следовательно, $D = 5 \cdot 2 = 10$.

Заметим, что вычисление данного определителя можно провести с использованием формулы (2.36). Действительно, поменяем местами в определителе $D$ второй и третий столбцы, а затем в получившемся определителе поменяем местами первую и последнюю строки. Получим, что

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 = 10,$$

поскольку

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2.$$

б) Напишем разложение Лапласа по первым двум строкам:

$$D = (-1)^{1+2+1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+2+3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 19 \cdot (125 - 30 - 30) - 30 \cdot (25 - 6) = 19 \cdot 65 - 30 \cdot 19 = 19 \cdot 35 = 665.$$

При вычислении определителей 3-го порядка мы использовали формулу (2.6).

в) Разложим определитель по первому и третьему столбцам, содержащим удачно расположенные нули:

$$D = (-1)^{1+3+1+3} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4+1+3} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4+1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-8) \cdot (-20) - (-10) \cdot (-62) - 7 \cdot 87 = -1069.$$

При вычислении определителей 3-го порядка можно сразу использовать формулу (2.6), но удобнее предварительно преобразовать их:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -(-1)\cdot\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -20,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 19 & 17 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 8 & 5 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = -62,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 7 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\cdot 5 + 6\cdot 1\cdot 2 = 87. \blacktriangledown$$

**Пример 9**. Вычислите определитель $D$ шестого порядка:

$$\text{а) } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}; \text{ б) } D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

▲ а) Дважды применив теорему об определителе ступенчатой матрицы, получим:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 9\cdot(-5) = 90.$$

б) Применим теорему Лапласа к третьему и четвертому столбцам:

$$D = (-1)^{3+4+3+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 7\end{vmatrix}\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 7\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 7\end{vmatrix}^3=1000.$$

При вычислении определителя четвертого порядка мы воспользовались замечанием к доказательству теоремы об определителе ступенчатой матрицы. ▼

В рассмотренных примерах результат достигался за один шаг путем непосредственного применения теоремы Лапласа к данному определителю. Обычно, однако, используя теорему Лапласа, приходится предварительно преобразовывать вычисляемые детерминанты.

**Пример 10.** Вычислите определитель $D$:

$$\text{а) } D=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3 & 4 & -5\\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7\\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3\\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2\\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3\end{vmatrix};\ \text{б) } D=\begin{vmatrix}5 & -5 & -3 & 4 & 2\\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3\\ 3 & -1 & 5 & -9 & -5\\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4\\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2\end{vmatrix}.$$

▲ а) Вычтем из второй строки удвоенную первую и прибавим к третьей строке удвоенную четвертую, получим, применяя теорему Лапласа ко второй и третьей строкам получившегося определителя:

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3 & 4 & -5\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1\\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2\\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3\end{vmatrix}=(-1)^{2+3+3+5}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & -1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & -2 & 1\\ -2 & 6 & 4\end{vmatrix}=-2\cdot 42=-84.$$

б) Прибавим ко второму столбцу первый и вычтем из четвертого столбца пятый, умноженный на 2, получим, применяя теорему Лапласа ко второму и четвертому столбцам получившегося определителя:

$$D=\begin{vmatrix}5 & 0 & -3 & 0 & 2\\ -4 & 0 & 3 & 0 & 3\\ 3 & 2 & 5 & 1 & -5\\ -7 & 0 & 6 & 0 & 4\\ 5 & 2 & 2 & 3 & -2\end{vmatrix}=(-1)^{3+5+2+4}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}5 & -3 & 2\\ -4 & 3 & 3\\ -7 & 6 & 4\end{vmatrix}=4\cdot(-21)=-84.\ ▼$$

**Пример 11.** Вычислите определитель порядка $2n$:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{12} & 1 & \dots & a_{1n} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ a_{21} & x_1 & a_{22} & x_2 & \dots & a_{2n} & x_n \\ x_1 & 0 & x_2 & 0 & \dots & x_n & 0 \\ a_{31} & x_1^2 & a_{32} & x_2^2 & \dots & a_{3n} & x_n^2 \\ x_1^2 & 0 & x_2^2 & 0 & \dots & x_n^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & x_1^{n-1} & a_{n2} & x_2^{n-1} & \dots & a_{nn} & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-1} & 0 & x_2^{n-1} & 0 & \dots & x_n^{n-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

▲ Применим теорему Лапласа ко 2-й, 4-й, ..., $(2n)$-й строкам, получим, учитывая, что только один минор $n$-го порядка, расположенный в этих строках, отличен от нуля:

$$D=(-1)^{2+4+\dots+2n+1+3+\dots+(2n-1)}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{n\cdot(n+1)+n\cdot n}\cdot(W_n(x_1, x_2, \dots, x_n))^2=(-1)^n\cdot(W_n(x_1, x_2, \dots, x_n))^2,$$

где $W_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — определитель Вандермонда порядка $n$ от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. По формуле (2.25) окончательно получаем:

$$D=(-1)^n\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)^2. \ ▼$$

**Пример 12.** Докажите, что справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & \dots & a_{1n} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{12} & \dots & 0 & b_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & \dots & a_{2n} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{22} & \dots & 0 & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & a_{n2} & 0 & \dots & a_{nn} & 0 \\ 0 & b_{n1} & 0 & b_{n2} & \dots & 0 & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.37)$$

▲ Доказательство немедленно следует из теоремы Лапласа, если ее применить к определителю в левой части равенства (2.37) по 1-й, 3-й, ..., $(2n-1)$-й строкам: в этих строках имеется только один отличный, может быть, от нуля минор — это определитель

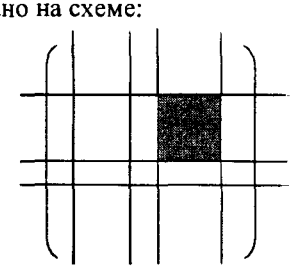
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

который располагается в 1-м, 3-м, ..., $(2n-1)$-м столбцах, а его дополнительным минором является определитель

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}. \blacktriangledown$$

В примере 3 из §3 было показано, что определитель произведения двух квадратных матриц второго порядка равен произведению определителей этих матриц (см. формулы (2.11) — (2.12)), и отмечено, что этот результат остается справедливым для любого $n$. Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы доказать соответствующую теорему и научиться применять ее к вычислению определителей. Для этого сначала установим связь между операцией умножения матриц и линейными (в частности, элементарными) преобразованиями строк (столбцов) матрицы. (*Линейным преобразованием строк* (*столбцов*) матрицы $A$ называется замена ее матрицей, у которой строками (столбцами) являются линейные комбинации строк (столбцов) $A$.)

Пусть матрица разбита на части вертикальными и горизонтальными прямыми так, как показано на схеме:



Получившиеся части (одна из них закрашена на схеме) называются *блоками* или *клетками*, а сама матрица — *блочной* или *клеточной*. Блочную матрицу можно рассматривать как матрицу, элементами которой являются матрицы.

Любая матрица является блочной, если в качестве блоков, из которых она составлена, берутся ее элементы. Покажем, что *основные операции над клеточными матрицами можно производить по тем же правилам, что и над числовыми матрицами, если разбиения на клетки проведены надлежащим образом* (то есть так, чтобы все операции имели смысл).

Если $A$ и $B$ — две матрицы одинакового строения, разбитые на клетки одинаковым образом, то их, очевидно, можно складывать поклеточно: матрица $A+B$ имеет ту же клеточную структуру, что и матрицы $A$ и $B$, при этом каждая ее клетка равна сумме соответствующих клеток матриц $A$ и $B$. Пусть теперь $A$ имеет размеры $m\times k$, $B$ — размеры $k\times n$, так что имеет смысл произведение $C=AB$ — матрица размеров $m\times n$. Пусть $k = k_1+\ldots+k_s$ и матрица $A$ разбита на клетки $A_{\alpha\beta}$, где $\alpha=1,\ldots,p$, $\beta = 1,\ldots,s$, так, что вертикальные полосы имеют ширину $k_1,\ldots,k_s$, а ширина каждой из $p$ горизонтальных полос может быть любой, безразлично какой именно. Пусть, соответственно, матрица $B$ разбита на клетки $B_{\gamma\delta}$, $\gamma=1,\ldots,s$, $\delta=1,\ldots,q$, при этом горизонтальные полосы имеют ширину $k_1,\ldots,k_s$, а ширина вертикальных (в количестве $q$) полос безразлична:

$$A=\left(\begin{array}{c|c|c|c}
A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1s}\\ \hline
A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2s}\\ \hline
\vdots & \vdots & & \vdots\\ \hline
\underbrace{A_{p1}}_{k_1} & \underbrace{A_{p2}}_{k_2} & \ldots & \underbrace{A_{ps}}_{k_s}
\end{array}\right),\quad
B=\left(\begin{array}{c|c|c|c}
B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1q}\\ \hline
B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2q}\\ \hline
\vdots & \vdots & & \vdots\\ \hline
B_{s1} & B_{s2} & \ldots & B_{sq}
\end{array}\right)\begin{array}{l}\}\,k_1\\ \}\,k_2\\ \vdots\\ \}\,k_s\end{array}.$$

Матрицу $C$ разобьем на клетки $C_{\mu\nu}$ так, что горизонтальные полосы по ширине такие же, как соответствующие горизонтальные полосы матрицы $A$, а вертикальные полосы — как соответствующие вертикальные полосы матрицы $B$. Тогда произведение $A_{\alpha\beta}B_{\beta\gamma}$ имеет смысл при любых $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Докажем, что

$$C_{\alpha\gamma}=\sum_{\beta=1}^{s}A_{\alpha\beta}B_{\beta\gamma}. \tag{2.38}$$

□ Для доказательства рассмотрим сначала два крайних частных случая. Пусть сперва матрица $A$ разбита только на горизонтальные полосы $A_1,\ldots,A_p$, матрица $B$ — только на вертикальные полосы $B_1,\ldots,B_q$, а матрица $C$, соответственно, — на $p$ горизонтальных полос и $q$ верти-

кальных. Тогда подматрица $C_{\alpha\gamma}$ матрицы $C$ есть произведение полосы $A_\alpha$ на полосу $B_\gamma$.

Пусть теперь $A$ разбита только на вертикальные полосы $A_1,...,A_s$ ширины $k_1,...,k_s$ соответственно, а $B$ разбита только на горизонтальные полосы $B_1, ..., B_s$ ширины $k_1, ..., k_s$ соответственно. В этом случае матрица $C$ на клетки не разбивается (т.е. состоит из одной клетки — этой клеткой является она сама). По определению произведения матриц имеем:

$$c_{ij} = (a_{i1}b_{1j} + ... + a_{ik_1}b_{k_1 j}) + (a_{i,k_1+1}b_{k_1+1,j} + ... + a_{i,k_1+k_2}b_{k_1+k_2,j}) + ...,$$

где суммы в скобках суть элементы матриц $A_1B_1$, $A_2B_2,...$, расположенные на пересечении их $i$-й строки и $j$-го столбца. Следовательно, $C = A_1B_1 + A_2B_2 + ... + A_sB_s$.

Для доказательства утверждения в общем случае сначала нужно разбить $A$ на горизонтальные полосы, а $B$ — на вертикальные. Соответствующие клетки матрицы $C$ равны произведениям горизонтальных полос матрицы $A$ на вертикальные полосы матрицы $B$. Каждое такое произведение, согласно второму частному случаю, является суммой произведений клеток матрицы $A$, на которые разбиты ее горизонтальные полосы, на клетки матрицы $B$, на которые разбиты ее вертикальные полосы. ■

**Пример 13.** Пусть $A$ и $B$ — верхние блочно-треугольные матрицы второго порядка и произведение $AB$ существует (как произведение блочных матриц). Найдите это произведение.

▲ Пусть матрицы $A$ и $B$ имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} M & N \\ O & P \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} D & F \\ O & G \end{pmatrix}, \tag{2.39}$$

где $M$, $N$, $P$ — блоки матрицы $A$, $D$, $F$, $G$ — блоки матрицы $B$, а $O$ обозначает соответствующих размеров нулевые матрицы — нулевые блоки матриц $A$ и $B$. Поскольку произведение $AB$ имеет смысл как произведение блочных матриц, заключаем, что число столбцов в матрице $M$ равно числу строк в матрицах $D$ и $F$, а число столбцов в матрицах $N$ и $P$ — числу строк в матрице $G$. Имеем по формуле (2.38):

$$AB = \begin{pmatrix} M\cdot D + N\cdot O & M\cdot F + N\cdot G \\ O\cdot D + P\cdot O & O\cdot F + P\cdot G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MD & MF + NG \\ O & PG \end{pmatrix}. \; ▼ \tag{2.40}$$

**Пример 14.** Пусть $A$ и $B$ — блочно-диагональные матрицы. Сформулируйте условия, при которых: 1) определены оба произведения $AB$ и $BA$ (как произведения блочных матриц); 2) $AB = BA$.

▲ 1) Пусть $A_1, \ldots, A_k$ — диагональные (квадратные) блоки матрицы $A$, $n_1, \ldots, n_k$ — их порядки (все другие (вообще говоря, прямоугольные, а не квадратные) блоки матрицы $A$, поскольку она блочно-диагональная, — нулевые). Соответственно, пусть $B_1, \ldots, B_l$ — диагональные блоки матрицы $B$, $m_1, \ldots, m_l$ — их порядки. Тогда на основании доказанного выше заключаем, что любое из произведений $AB$ или $BA$ (а, значит, и оба эти произведения) имеет смысл, если $k = l$, т.е. если количества блоков на диагоналях матриц $A$ и $B$ совпадают, и при этом $n_i = m_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$, т.е. если совпадают порядки диагональных блоков, имеющих одинаковые номера (в обеих матрицах диагональные блоки занумерованы одинаковым образом: подряд, начиная с левого верхнего и кончая правым нижним).

2) Для выполнения равенства $AB = BA$, очевидно, кроме условий пункта 1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства $A_iB_i = B_iA_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$, т.е. чтобы были перестановочны диагональные блоки, имеющие одинаковые номера. ▼

**Пример 15.** Разбивая данные матрицы $A$ и $B$ на блоки, вычислите произведение $AB$:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$3)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$4)\ A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & i & -1 & -i\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -i & -1 & i\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}i & 1 & 0 & 0\\ 1 & i & 0 & 0\\ 0 & 0 & i & 1\\ 0 & 0 & 1 & i\end{pmatrix};$$

$$5)\ A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 5 & 5\\ 3 & 4 & 6 & 6 & 6\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

▲ 1) Положим $P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ и представим матрицы $A$ и $B$ следующим образом в виде блочных матриц:

$$A=\begin{pmatrix}O & -P\\ P & O\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}O & -Q\\ Q & O\end{pmatrix}.$$

Используя формулу (2.38), имеем теперь

$$AB=\begin{pmatrix}O\cdot O+(-P)\cdot Q & O\cdot(-Q)+(-P)\cdot O\\ P\cdot O+O\cdot Q & P\cdot(-Q)+O\cdot O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-PQ & O\\ O & -PQ\end{pmatrix},$$

и так как

$$PQ=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

то окончательно получаем:

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

2) Воспользуемся результатом примера 13, положив

$$M=P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix},\ D=G=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix},F=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix},O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

в равенствах (2.39). Получим по формуле (2.40), учитывая равенства

$$MD=PG=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E_2,$$

$$MF=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix},$$

$$NG=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix},\ MF+NG=O,$$

что $AB=\begin{pmatrix}E_2 & O\\ O & E_2\end{pmatrix}=E_4$ — единичная матрица 4-го порядка.

3) Положим $P=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ -2 & 0 & 2\\ 6 & 3 & -3\end{pmatrix}$, $Q=(0\ 0\ 0)$, $R=(1\ 2\ 3)$, $O$ — нулевая матрица 3-го порядка, (2) и (4) — одноэлементные матрицы $1\times 1$ с элементами 2 и 4 соответственно. Тогда матрицы $A$ и $B$ следующим образом представляются в виде блочных матриц второго порядка:

$$A=\begin{pmatrix}P & Q^T\\ Q & (2)\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}O & R^T\\ R & (4)\end{pmatrix}.$$

Имеем по формуле (2.38):

$$AB=\begin{pmatrix}P\cdot O+Q^T\cdot R & P\cdot R^T+Q^T\cdot(4)\\ Q\cdot O+(2)\cdot R & Q\cdot R^T+(2)\cdot(4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q^TR & PR^T+4Q^T\\ 2R & QR^T+(8)\end{pmatrix},$$

и так как $Q^TR=O$, $PR^T=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ -2 & 0 & 2\\ 6 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 4\\ 3\end{pmatrix}$, $4Q^T=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, $2R=$ $=(2\ \ 4\ \ 6)$ и, наконец, $QR^T=(0)$, окончательно получаем

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 6 & 8\end{pmatrix}.$$

4) Положим $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & i\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & i\end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix}i & 1\\ 1 & i\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, тогда матрицы $A$ и $B$ следующим образом представятся в виде блочных матриц:

$$A=\begin{pmatrix} P & Q \\ Q^T & R \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} S & O \\ O & S \end{pmatrix}.$$

Имеем по формуле (2.38):

$$AB=\begin{pmatrix} P\cdot S+Q\cdot O & P\cdot O+Q\cdot S \\ Q^T\cdot S+R\cdot O & Q^T\cdot O+R\cdot S \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} PS & QS \\ Q^TS & RS \end{pmatrix},$$

и так как

$$PS=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i+1 & 1+i \\ 2i & 0 \end{pmatrix},$$

$$QS=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i+1 & 1+i \\ -2i & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q^TS=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i-1 & 1-i \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$RS=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i-1 & 1-i \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

то окончательно получаем:

$$AB=\begin{pmatrix} i+1 & i+1 & i+1 & i+1 \\ 2i & 0 & -2i & 0 \\ i-1 & 1-i & i-1 & 1-i \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

5) Воспользуемся результатом примера 13, положив в равенствах (2.39)

$$D=M=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ G=P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix},\ F=O^T.$$

Получим по формуле (2.40), учитывая равенства

$$MD=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix},\ MF=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$NG=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & 25 & 30 \\ 18 & 30 & 36 \end{pmatrix},$$

$$MF + NG = NG = \begin{pmatrix} 15 & 25 & 30 \\ 18 & 30 & 36 \end{pmatrix},$$

$$PG = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 9 & 11 \\ 6 & 11 & 14 \end{pmatrix},$$

что

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 15 & 25 & 30 \\ 15 & 22 & 18 & 30 & 36 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 6 & 11 & 14 \end{pmatrix}. \blacktriangledown$$

Рассмотрим произведение $C = AB$ двух матриц $A$ и $B$. Разобьем матрицу $B$ на клетки, считая клетками столбцы $B$, матрицу $A$ рассмотрим как состоящую из одной клетки. Соответствующими клетками их произведения $C$ будут столбцы. Получим $A(B_1, B_2, ..., B_n) = (AB_1, AB_2, ..., AB_n)$. Здесь $B_1, B_2, ..., B_n$ — столбцы $B$ и, соответственно, $AB_1, AB_2, ..., AB_n$ — столбцы $C$. С таким представлением произведения мы уже встречались при доказательстве ассоциативности произведения матриц.

Теперь примем за клетки $B$ ее строки:

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_k \end{pmatrix},$$

а за клетки $A$ — ее элементы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}$. В этом представлении

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}B_1 & + & \dots & + & a_{1k}B_k \\ a_{21}B_1 & + & \dots & + & a_{2k}B_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}B_1 & + & \dots & + & a_{mk}B_k \end{pmatrix},$$

так что строками матрицы $AB$ оказываются линейные комбинации строк $B$.

Аналогично, расщепление матрицы $A$ на строки дает:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_m B \end{pmatrix},$$

расщепление же $A$ на столбцы дает

$$(A_1, ..., A_k)\begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} \\ . & . & . \\ b_{k1} & ... & b_{kn} \end{pmatrix} = (b_{11}A_1 + ... + b_{k1}A_k, ..., b_{1n}A_1 + ... + b_{kn}A_k).$$

Таким образом, *умножение матрицы на некоторую вспомогательную матрицу слева равносильно линейному комбинированию строк матрицы, умножение справа — линейному комбинированию ее столбцов.*

Рассмотрим матрицу $E_{ij}$, $i \neq j$, у которой элемент, стоящий в $i$-й строке и $j$-м столбце, равен 1, а все остальные элементы равны нулю. Умножение слева матрицы $A$ на $E_{ij}$ переставляет $j$-ю строку матрицы $A$ на $i$-е место, а все остальные строки заменяет на нулевые. Квадратная матрица $E + cE_{ij}$ называется *матрицей трансвекции* или *матрицей элементарного преобразования*, поскольку умножение матрицы $A$ слева на $E + cE_{ij}$ равносильно прибавлению к $i$-й ее строке $j$-й строки, умноженной на $c$, с сохранением всех остальных строк, т.е. выполнению элементарного преобразования строк $A$. Умножение же на $E_{ij}$ справа переставляет $i$-й столбец на $j$-е место, заменяя на нулевые остальные столбцы. Поэтому умножение матрицы $A$ справа на $E + cE_{ij}$ равносильно прибавлению к $j$-му столбцу $A$ ее $i$-го столбца, умноженного на $c$, т.е. выполнению элементарного преобразования столбцов $A$. Заметим, что умножение $i$-й строки (столбца) матрицы $A$ на число $c \neq 0$ можно осуществить путем умножения $A$ слева (справа) на диагональную матрицу $D$, у которой все диагональные элементы равны 1, кроме $i$-го, равного $c$ (матрица $D$, очевидно, имеет вид $D = E + (c-1)E_{ii}$ и также называется матрицей элементарного преобразования). Все остальные строки (столбцы) $A$ при этом не изменятся. Последнее из трех элементарных преобразований строк (столбцов) матрицы $A$ — перестановка $i$-й и $j$-й строк, $i \neq j$ — также равносильно умножению матрицы $A$ слева (справа) на некоторую матрицу. Действительно, искомое эле-

ментарное преобразование строк можно получить, например, по следующей схеме

$$\begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \xrightarrow{\text{I}} \begin{matrix} i+j \\ j \end{matrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{matrix} i+j \\ j-(i+j)=-i \end{matrix} \xrightarrow{\text{III}} \begin{matrix} j \\ -i \end{matrix} \xrightarrow{\text{IV}} \begin{matrix} j \\ i \end{matrix}.$$

Здесь на I и III шагах к $i$-й строке прибавляется $j$-я, на II шаге из $j$-й строки вычитается $i$-я, наконец, на IV шаге $i$-я строка умножается на $-1$ (при этом, разумеется, каждый раз используется та $i$-я ($j$-я) строка, которая имеется в матрице $A$ на данный момент). Каждое из этих преобразований можно осуществить путем умножения матрицы $A$ слева на подходящую матрицу элементарного преобразования, именно нужно последовательно умножить $A$ на матрицы $E+E_{ij}$, $E-E_{ji}$, $E+E_{ij}$, $E-2E_{jj}$. Значит, и композиция этих преобразований, т.е. перестановка $i$-й и $j$-й строк, осуществляется умножением $A$ слева на некоторую матрицу (которую также естественно назвать матрицей элементарного преобразования). Читателю будет полезно, непосредственно перемножив указанные матрицы, получить таким образом матрицу, умножение на которую слева переставляет $i$-ю и $j$-ю строки. Укажем другой способ отыскания этой матрицы. Обозначим через $X$ искомую матрицу, через $A$ и $A'$ — соответственно данную матрицу и матрицу, полученную из нее перестановкой $i$-й и $j$-й строк. Тогда $XA=A'$. Возьмем в качестве $A$ единичную матрицу, получим:

$$X = XE = E' = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad i \quad j \end{matrix} & \end{array}.$$

Остается проверить, что для найденной матрицы $X$ равенство $XA=A'$ справедливо при любой матрице $A$. Эту очевидную проверку мы оставляем читателю.

Условимся в дальнейшем для краткости всякую матрицу элементарного преобразования называть просто *элементарной*. Иными словами, элементарной является всякая матрица, которую можно получить из единичной матрицы с помощью элементарного преобразования.

Треугольная матрица называется *унитреугольной*, если все элементы ее главной диагонали равны 1. Выясним, как изменяются строки матрицы $A$ при умножении ее слева на верхнюю унитреугольную матрицу $C$. Пусть

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ и } A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}.$$

Здесь $A_1, \dots, A_m$ — строки матрицы $A$.

Имеем:

$$CA = \begin{pmatrix} A_1 + c_{12}A_2 + \dots + c_{1m}A_m \\ A_2 + \dots + c_{2m}A_m \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_m \end{pmatrix},$$

так что первая строка получена из первой строки $A$ прибавлением последующих строк, умноженных на $c_{12}, \dots, c_{1m}$, вторая — из второй прибавлением последующих строк с соответствующими множителями и т.д., последняя строка остается без изменения.

*Если $A$ — квадратная матрица, то при всех описанных преобразованиях определитель матрицы не изменяется, так что* $\det CA = \det A$.

Если $C$ — нижняя унитреугольная матрица

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & 1 & \dots & 0 \\ & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$CA = \begin{pmatrix} A_1 \\ c_{21}A_1 + A_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{m1}A_1 + c_{m2}A_2 + \dots + A_m \end{pmatrix},$$

и здесь описание преобразований удобно начинать с конца: к последней строке прибавляются предшествующие, умноженные на $c_{m1}, c_{m2}, \dots, c_{m,m-1}$, к предпоследней — предшествующие, умноженные на соответствующие элементы матрицы $C$, и т.д.; ко второй строке прибавляется первая, умноженная

на $c_{21}$, и первая остается без изменения. Поэтому и в этом случае $\det CA = \det A$, если $A$ — квадратная матрица.

При правом умножении на унитреугольную матрицу $C$ происходят аналогичные преобразования столбцов, поэтому также $\det AC = \det A$ ($A$ — квадратная матрица).

Теперь все готово для доказательства теоремы об определителе произведения двух матриц в общем случае.

**Теорема.** *Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей сомножителей.*

□ Пусть $A$ и $B$ — две квадратные матрицы порядка $n$. Рассмотрим блочную матрицу $C = \begin{pmatrix} A & O \\ -E & B \end{pmatrix}$, где $E$ — единичная матрица порядка $n$. По теореме об определителе ступенчатой матрицы $\det C = \det A \cdot \det B$. Умножим теперь матрицу $C$ слева на унитреугольную матрицу $\begin{pmatrix} E & A \\ O & E \end{pmatrix}$. При этом определитель матрицы $C$ не изменится. Таким образом,

$$\det A \cdot \det B = \det\left(\begin{pmatrix} E & A \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ -E & B \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} O & AB \\ -E & B \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся равенством (1) из замечания к доказательству теоремы об определителе ступенчатой матрицы, получим:

$$\det\begin{pmatrix} O & AB \\ -E & B \end{pmatrix} = (-1)^n \det AB \cdot \det(-E) = \det AB.$$

Следовательно, $\det AB = \det A \cdot \det B$. ■

**Пример 16.** Представьте в виде определителя произведение определителей:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$.

▲ а) Положим $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}$. Тогда $AB=\begin{pmatrix}-5 & -2\\ -8 & 4\end{pmatrix}$, и по теореме об определителе произведения получаем:

$$\det A\cdot\det B=\det AB=\begin{vmatrix}-5 & -2\\ -8 & 4\end{vmatrix}.$$

б) Имеем аналогично пункту а):

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ -1 & 3 & 6\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ -1 & -3 & 5\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix},\ AB=\begin{pmatrix}2 & 8 & 17\\ 11 & -6 & 5\\ 3 & 8 & -3\end{pmatrix},$$

следовательно,

$$\det A\cdot\det B=\begin{vmatrix}2 & 8 & 17\\ 11 & -6 & 5\\ 3 & 8 & -3\end{vmatrix}.$$

в) Первый способ. По теореме об определителе ступенчатой матрицы

$$\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{vmatrix}.$$

Положим

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & -1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix},$$

тогда

$$AB=\begin{pmatrix}7 & 5 & -3 & 3\\ -1 & 5 & -3 & 3\\ -4 & -4 & -5 & 4\\ -4 & -4 & 0 & 3\end{pmatrix},$$

и по теореме об определителе произведения получаем, что искомым является определитель

$$\det AB = \begin{vmatrix} 7 & 5 & -3 & 3 \\ -1 & 5 & -3 & 3 \\ -4 & -4 & -5 & 4 \\ -4 & -4 & 0 & 3 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Второй способ. По формуле (2.37) (см. пример 12 из §5 этой главы) имеем:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Положим

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 5 & 3 \\ -2 & -5 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 5 & 1 \\ -4 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

и по теореме об определителе произведения получаем, что искомым является определитель

$$\det AB = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 5 & 3 \\ -2 & -5 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 5 & 1 \\ -4 & 0 & -4 & 3 \end{vmatrix}. \blacktriangledown \qquad (2)$$

Замечание. Определители (1) и (2) равны, т.е. имеют равные значения (проверьте самостоятельно, что эти значения равны $-984$), но матрицы у этих определителей разные. Таким образом, искомое представление не единственно (ср. с результатом примера 17).

**Пример 17.** Перемножьте определители

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} \text{ и } d_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

всеми четырьмя возможными способами (т.е. умножая строки или столбцы первого определителя на строки или столбцы второго, при этом, например, при умножении строк на строки элемент $\alpha_{ij}$ получающегося определителя равен произведению $i$-й строки $d_1$ на транспонированную $j$-ю строку $d_2$) и проверьте, что во всех случаях значение полученного определителя равно произведению значений данных определителей. Объясните результат.

▲ Получим при умножении:

1) Строк $d_1$ на строки $d_2$ — определитель $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -4 & -7 & -13 \\ -3 & -4 & -13 \end{vmatrix}$;

2) Строк $d_1$ на столбцы $d_2$ — определитель $\begin{vmatrix} 7 & -26 & 13 \\ 12 & -35 & 19 \\ 17 & -52 & 27 \end{vmatrix}$;

3) Столбцов $d_1$ на строки $d_2$ — определитель $\begin{vmatrix} -3 & 1 & -6 \\ -3 & 1 & -8 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}$;

4) Столбцов $d_1$ на столбцы $d_2$ — определитель $\begin{vmatrix} 9 & -35 & 18 \\ 13 & -47 & 24 \\ 12 & -37 & 17 \end{vmatrix}$.

Значения данных определителей $d_1$ и $d_2$ равны соответственно $-5$ и $10$, а значения всех полученных определителей равны $-50$ (проверьте!), т.е. равны $d_1 d_2$. Причина этого "чуда" в следующем. Обозначим $D_1$ и $D_2$ матрицы определителей $d_1$ и $d_2$. При умножении определителей $d_1$ и $d_2$ в соответствии с условием задачи мы получаем:

1) $\det D_1 D_2^T$; 2) $\det D_1 D_2$; 3) $\det D_1^T D_2^T$; 4) $\det D_1^T D_2$.

В силу свойства 1° определителей $\det D_i^T = \det D_i$, поэтому на основании теоремы об определителе произведения заключаем, что в каждом из четырех случаев получающийся определитель равен $\det D_1 \cdot \det D_2 = d_1 d_2$. ▼

**Пример 18.** Докажите, что определитель

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & -7 & -1 & 9 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

▲ Можно, конечно, вычислить данный определитель и убедиться, что он не равен нулю. Но можно поступить иначе: вычислить квадрат определителя $d$, используя теорему об определителе произведения, и убедиться, что $d^2 \neq 0$. Именно, обозначим матрицу определителя $d$ через $D$, получим:

$$d^2 = (\det D)^2 = \det D \cdot \det D^T = \det DD^T,$$

и так как

$$DD^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & -7 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -7 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 140 \end{pmatrix},$$

то $d^2 = 4 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 140 = 78400 \neq 0$.

Заметим, что мы не достигли бы желаемого результата столь легко, если бы вместо тождества $(\det D)^2 = \det DD^T$ использовали тождество $(\det D)^2 = \det D^2$, поскольку

$$D^2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 & -12 \\ 11 & -5 & 0 & 10 \\ -7 & 5 & 12 & -8 \\ 14 & -80 & -10 & 86 \end{pmatrix},$$

так что вычисление $\det D^2$ нисколько не проще, чем вычисление $d$. ▼

Те приемы вычисления определителей, которые нам до сих пор встречались, можно рассматривать как умножения слева (при комбинировании строк) или как умножения справа (при комбинировании столбцов) матрицы определителя на вспомогательные матрицы, именно, матрицы трансвекций. При этом нужно было внимательно следить за тем, чтобы в процессе ли-

нейного комбинирования не прибавить уже измененную строку (или столбец), как если бы она осталась неизмененной.

Теорема об определителе произведения дает бóльшую свободу для линейного комбинирования строк (или столбцов) за счет умножения на подходящие вспомогательные матрицы. *Определитель при этом может меняться, но мы в состоянии учесть это изменение, именно, определитель приобретает множителем определитель вспомогательной матрицы.* Остается следить только за тем, чтобы не умножить на матрицу с нулевым определителем.

**Пример 19.** Найдите $\det A$, если

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}.$$

▲ Здесь напрашивается несколько способов линейного комбинирования строк. Хорошо сложить все строки. Не менее хорошо сложить первые две и вычесть третью и четвертую, сложить первую с третьей и вычесть вторую и четвертую и, наконец, сложить первую с четвертой и вычесть вторую и третью. *Все эти преобразования выполнятся одновременно, если исходную матрицу умножить слева на матрицу*

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно,

$$CA=\begin{pmatrix} a+b+c+d & a+b+c+d & a+b+c+d & a+b+c+d \\ a+b-c-d & a+b-c-d & -a-b+c+d & -a-b+c+d \\ a-b+c-d & -a+b-c+d & a-b+c-d & -a+b-c+d \\ a-b-c+d & -a+b+c-d & -a+b+c-d & a-b-c+d \end{pmatrix}$$

и

$$\det CA=\det C\det A=(a+b+c+d)(a+b-c-d)\times$$

$$\times(a-b+c-d)\,(a-b-c+d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=(a+b+c+d)\,(a+b-c-d)\,(a-b+c-d)\,(a-b-c+d)\det C.$$

Остается убедиться, что $\det C \neq 0$. Мы его вычисляли выше (см. пример 12 из §2 и замечание после примера 7 из §3 этой главы), он равен $-16$. Но легко также убедиться в справедливости неравенства $\det C \neq 0$, учитывая, что (ср. с примером 18 этого параграфа)

$$C^2=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix},\ \text{так что}\ (\det C)^2=256.$$

Сократив на $\det C \neq 0$, получаем ответ:

$$\det A=(a+b+c+d)\,(a+b-c-d)\,(a-b+c-d)\,(a-b-c+d).\ \blacktriangledown$$

Замечание 1. Определитель $\det A$ уже был вычислен выше (см. пример 3 из §4 главы 2). Читателю будет полезно сравнить оба метода решения задачи и убедиться в преимуществе метода, изложенного в примере 19.

Замечание 2. Подчеркнем еще раз важность того, что $\det C \neq 0$. Если за этим не проследить, можно получить неверный результат. Например, для той же матрицы $A$ возьмем в качестве вспомогательной матрицу

$$C=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$CA=\begin{pmatrix}a+b+c+d&a+b+c+d&a+b+c+d&a+b+c+d\\a+b+c+d&a+b+c+d&a+b+c+d&a+b+c+d\\a+b+c+d&a+b+c+d&a+b+c+d&a+b+c+d\\a+b+c+d&a+b+c+d&a+b+c+d&a+b+c+d\end{pmatrix}$$

и $\det CA=\det C\det A=(a+b+c+d)^4\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}=(a+b+c+d)^4\det C.$

"Сократив" на $\det C$, получим неверный результат:

$$\det A=(a+b+c+d)^4.$$

Но на самом деле $\det C=0$, и сокращение на $\det C$ недопустимо.

**Пример 20.** Вычислите определитель $D$ посредством умножения его на определитель $\delta$:

$$\text{а) } D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & -13 \\ 2 & 3 & 5 & 15 \end{vmatrix}, \ \delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{б) } D=\begin{vmatrix} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}, \ \delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

▲ а) Поскольку $\delta=1$, имеем по теореме об определителе произведения двух квадратных матриц:

$$D=D\cdot\delta=\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & -13 \\ 2 & 3 & 5 & 15 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}=24.$$

Подчеркнем, что умножать матрицу определителя $D$ на матрицу определителя $\delta$ нужно именно справа, умножение слева ничего не дает: задача сводится к вычислению определителя

$$\begin{vmatrix} -16 & -34 & -46 & -106 \\ 3 & 6 & 7 & 22 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 15 \end{vmatrix},$$

который ничуть не проще исходного определителя $D$.

б) Снова умножим справа матрицу определителя $D$ на матрицу определителя $\delta$, получим:

$$D=\det\begin{pmatrix} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=18. \ ▼$$

**Пример 21.** Найдите $D = \det A$, где

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

▲ Пример очень похож на пример 19, но здесь линейное комбинирование строк малополезно. Хорошо возвести $D$ в квадрат: $D^2 = \det A^T A =$

$$= \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix} =$$

$= (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$.

Следовательно, или $D = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$, или $D = -(a^2+b^2+$ $+c^2+d^2)^2$, или при одних значениях $a, b, c, d$ одно, при других — другое. Разберемся в этом вопросе. Мы имеем равенство *полиномов* от $a, b, c, d$: $\Delta^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$, или

$$(\Delta - (a^2+b^2+c^2+d^2)^2)\,(\Delta + (a^2+b^2+c^2+d^2)^2) = 0.$$

Следовательно, равен нулю один из сомножителей. Равенство нулю второго сомножителя приводит к соотношению

$$D = -(a^2+b^2+c^2+d^2)^2,$$

что не имеет места при следующих значениях букв: $a = 1$, $b = c = d = 0$. Следовательно,

$$D = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2. \ ▼$$

**Пример 22.** Вычислите определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix},$$

представив его в виде произведения определителей.

▲ Перемножив матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & x_1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & x_2 & 0 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & x_n & 0 & \dots & 0\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ y_1 & y_2 & \dots & y_n\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix},$$

получим матрицу определителя $D$. Следовательно,

$$D=\det AB=\det A\cdot\det B.$$

При $n>2$ каждый из определителей $\det A$ и $\det B$ равен нулю: матрица каждого из этих определителей содержит нулевую подматрицу с суммой размеров $n+(n-2)>n$ (пример 4 из этого параграфа).

При $n=2$ имеем $D=(x_2-x_1)\,(y_2-y_1)$. ▼

**Пример 23.** Перемножая два определителя

$$X=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ x_2 & -x_1 & -x_4 & x_3\\ x_3 & x_4 & -x_1 & -x_2\\ x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1\end{vmatrix} \text{ и } Y=\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & y_3 & y_4\\ y_2 & -y_1 & -y_4 & y_3\\ y_3 & y_4 & -y_1 & -y_2\\ y_4 & -y_3 & y_2 & -y_1\end{vmatrix},$$

докажите *тождество Эйлера*:

$$\begin{aligned}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)\,(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)&=(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2+\\ &+(x_1y_2-x_2y_1-x_3y_4+x_4y_3)^2+(x_1y_3+x_2y_4-x_3y_1-x_4y_2)^2+\\ &+(x_1y_4-x_2y_3+x_3y_2-x_4y_1)^2.\end{aligned}\qquad(2.41)$$

Какое свойство целых чисел отсюда вытекает?

▲ Обозначим

$$A=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ x_2 & -x_1 & -x_4 & x_3\\ x_3 & x_4 & -x_1 & -x_2\\ x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & y_3 & y_4\\ y_2 & -y_1 & -y_4 & y_3\\ y_3 & y_4 & -y_1 & -y_2\\ y_4 & -y_3 & y_2 & -y_1\end{pmatrix}$$

матрицы определителей $X$ и $Y$ соответственно, положим

$$p=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2,\ q=y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2,$$

$$a=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4,\ b=x_1y_2-x_2y_1-x_3y_4+x_4y_3,$$

$$c=x_1y_3+x_2y_4-x_3y_1-x_4y_2,\ d=x_1y_4-x_2y_3+x_3y_2-x_4y_1.$$

Тогда тождество (2.41) примет вид:

$$pq = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \qquad (2.41')$$

Вычислим квадрат определителя $X$, имеем:

$$X^2 = (\det A)^2 = \det AA^T = \det\begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} = p^4.$$

Аналогично получаем, что $Y^2 = q^4$. Следовательно,

$$(pq)^4 = (XY)^2 = (\det AB^T)^2 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$$

в силу результата примера 21 этого параграфа.

Таким образом, справедливо тождество

$$(pq - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2))(pq + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)) \times$$
$$\times((pq)^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2) = 0,$$

откуда (каждый из сомножителей — это *полином* от переменных $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$, см. пример 21) заключаем, что $pq = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, т.е. (2.41′) справедливо. Тождество (2.41) доказано.

При целых значениях переменных $x_1, \ldots, x_4, y_1, \ldots, y_4$ из доказанного тождества следует, что *произведение двух чисел, каждое из которых может быть представлено как сумма квадратов четырех целых чисел, также представимо в виде суммы квадратов четырех целых чисел.* Этот результат хорошо известен в теории чисел. Подчеркнем, что из (2.41) следует также, как конкретно строится искомое представление для произведения, если известны представления для сомножителей, т.е. если известны $x_1, \ldots, x_4, y_1, \ldots, y_4$. ▼

Замечание. Перемножив комплексные числа $z = a + bi$ и $w = c + di$, получаем: $zw = (ac - bd) + (bc + ad)i$, поэтому

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2 \cdot |w|^2 = |zw|^2 = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2,$$

откуда при целых $a$, $b$, $c$, $d$ следует, что *если каждое из двух чисел представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел, то этим же свойством обладает и их*

*произведение,* т.е. справедлив результат, аналогичный результату, полученному в примере 23, когда число квадратов в сумме равно 2.

Пусть произведение двух прямоугольных матриц есть матрица квадратная. Это будет в том и только в том случае, когда не только число столбцов первой матрицы равно числу строк второй, но и число строк первой равно числу столбцов второй:

$$\begin{array}{c} m \\ \\ \\ \end{array}\underset{n}{\boxed{A}} \cdot \underset{m}{\boxed{B}}\, n = \underset{m}{\boxed{AB}}\, m$$

В этой ситуации имеет место следующая теорема, называемая теоремой Бине-Коши.

Теорема. *Определитель матрицы $AB$ равен нулю, если $m > n$, и равен сумме произведений всех миноров $m$-го порядка матрицы $A$ на соответствующие миноры $m$-го порядка матрицы $B$, если $m \le n$.*

Соответствие миноров понимается здесь в следующем смысле: номера столбцов матрицы $A$, составляющих минор, совпадают с номерами строк матрицы $B$, из которых составляется соответствующий минор.

Таким образом,

$$\det AB = \sum_{\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_m} A_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m} B_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m}, \qquad (2.42)$$

где $A_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m}$ — минор матрицы $A$, составленный из столбцов с номерами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ и $B_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m}$ — минор матрицы $B$, составленный из строк с номерами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$.

Теорему Бине-Коши можно доказать аналогично тому, как была доказана теорема об определителе произведения двух квадратных матриц (которая, конечно, есть частный случай теоремы Бине-Коши). Однако при этом пришлось бы воспользоваться теоремой Лапласа в общей формулировке. Поэтому здесь мы ограничимся доказательством теоремы Бине-Коши в случае $m > n$ (для этого достаточно теоремы об определителе произведения двух квадратных матриц) и приведем полезные следствия этой теоремы. Полное доказательство теоремы Бине-Коши, основанное на иной идее, нежели использование теоремы Лапласа, читатель найдет в книге [3].

□ Пусть $m > n$. Рассмотрим блочную матрицу $\widetilde{A} = (A \;\; O)$, которая получается из матрицы $A$, если ее дополнить $m - n$ столбцами из нулей (таким образом, $O$ — это нулевая матрица размеров $m \times (m - n)$). Анало-

гично, рассмотрим блочную матрицу $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B \\ O^T \end{pmatrix}$, получающуюся из матрицы $B$ добавлением $m-n$ нулевых строк. Тогда по формуле (2.38) $\widetilde{A}\widetilde{B} = (AB + O \cdot O^T) = (AB)$ — блочная матрица, состоящая из одного блока — матрицы $AB$. Рассматривая $\widetilde{A}\widetilde{B}$ как квадратную матрицу порядка $m$, получаем по теореме об определителе произведения двух матриц:

$$\det AB = \det \widetilde{A}\widetilde{B} = \det \widetilde{A} \cdot \det \widetilde{B} = 0 \cdot 0 = 0. \ \blacksquare$$

**Пример 24.** Докажите, что для любой вещественной матрицы $A$ справедливо неравенство

$$\det AA^T \geq 0. \tag{2.43}$$

▲ Пусть матрица $A$ имеет размеры $m \times n$. Если $m = n$, то утверждение очевидно:

$$\det AA^T = \det A \cdot \det A^T = (\det A)^2 \geq 0.$$

Пусть $m > n$. Положим в теореме Бине-Коши $B = A^T$, получим: $\det AA^T = \det AB = 0$, поскольку $m > n$. Пусть, наконец, $m < n$. Снова обратимся к теореме Бине-Коши и положим $B = A^T$. Тогда строки $B$ — это столбцы $A$, а так как определитель не меняется при транспонировании, то миноры $A_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m}$ и $B_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m}$ в (2.42) равны при всех $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_m$. Поэтому все слагаемые в сумме (2.42) неотрицательны, следовательно, неотрицательна и вся сумма, т.е. $\det AB = \det AA^T$. Неравенство (2.43) доказано. ▼

**Пример 25.** Докажите, что справедливо следующее *тождество Коши:*

$$\begin{aligned} &(a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n)(b_1d_1 + b_2d_2 + \ldots + b_nd_n) - \\ &-(a_1d_1 + a_2d_2 + \ldots + a_nd_n)(b_1c_1 + b_2c_2 + \ldots + b_nc_n) = \\ &= \sum_{1 \leq i < k \leq n} (a_ib_k - a_kb_i)(c_id_k - c_kd_i) \quad (n > 1). \end{aligned} \tag{2.44}$$

▲ Положим

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \\ \vdots & \vdots \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$AB=\begin{pmatrix} a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_nc_n & a_1d_1+a_2d_2+\ldots+a_nd_n \\ b_1c_1+b_2c_2+\ldots+b_nc_n & b_1d_1+b_2d_2+\ldots+b_nd_n \end{pmatrix}$$

и

$$\det AB=(a_1c_1+\ldots+a_nc_n)(b_1d_1+\ldots+b_nd_n)-(a_1d_1+\ldots+a_nd_n)(b_1c_1+\ldots+b_nc_n).$$

С другой стороны, по теореме Бине-Коши

$$\det AB=\sum_{1\le i<k\le n}\begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c_i & d_i \\ c_k & d_k \end{vmatrix}=\sum_{1\le i<k\le n}(a_ib_k-a_kb_i)(c_id_k-c_kd_i).$$

Сравнивая результаты вычисления $\det AB$, приходим к тождеству (2.44).

Заметим, что (2.44) формально выполняется и при $n=1$, если считать, что "пустая" сумма (т.е. сумма, не содержащая ни одного слагаемого) равна нулю. ▼

Укажем несколько важных следствий тождества (2.44).

1) Полагая $c_i=a_i$, $d_i=b_i$ для всех $i=1,2,\ldots,n$, получаем тождество Лагранжа:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2=\sum_{1\le i<k\le n}(a_ib_k-a_kb_i)^2. \qquad (2.45)$$

2) Пусть числа $a_i$ и $b_i$, $i=1,2,\ldots,n$, — комплексные. Полагая $c_i=\overline{a}_i$, $d_i=\overline{b}_i$ — комплексно сопряженные числа к $a_i$ и $b_i$, получаем еще одно тождество Коши:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)-\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\overline{b}_i\right|^2=\sum_{1\le i<k\le n}|a_ib_k-a_kb_i|^2. \qquad (2.46)$$

3) Пусть числа $a_i$ и $b_i$, $i=1,2,\ldots,n$, — действительные. Тогда из (2.45) заключаем, что справедливо неравенство Коши-Буняковского:

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\le(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2), \qquad (2.47)$$

причем *равенство здесь возможно, только если* $a_ib_k-a_kb_i=0$ *для всех* $i$ *и* $k$, *т.е. если строки матрицы* $A$ *пропорциональны.*

4) Из (2.46) следует известное неравенство Коши:

$$|a_1\overline{b}_1+a_2\overline{b}_2+\ldots+a_n\overline{b}_n|^2\le(|a_1|^2+|a_2|^2+\ldots+|a_n|^2)(|b_1|^2+|b_2|^2+\ldots+|b_n|^2), \qquad (2.48)$$

причем *равенство возможно, только если* $a_i\overline{b}_k-a_k\overline{b}_i=0$ *для всех* $i$ *и* $k$, *т.е. если строки матрицы* $A$ *пропорциональны.*