

Итак,

$$f(A) = A^n - b_1 A^{n-1} + b_2 A^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} b_{n-1} A + (-1)^n b_n E = O,$$

что и требовалось доказать. ■

В примере 26 было показано, что подобные матрицы обладают одинаковыми характеристическими многочленами. Покажем, что подобные матрицы обладают одним и тем же минимальным многочленом.

□ Действительно, если $B = T^{-1}AT$ и многочлен $f(x) = \alpha_0 x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} x + \alpha_k$ аннулируется матрицей A , то он аннулируется и матрицей B : из равенства

$$\alpha_0 A^k + \alpha_1 A^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} A + \alpha_k E = O$$

получаем, умножая слева на T^{-1} , справа — на T , что

$$T^{-1}(\alpha_0 A^k + \alpha_1 A^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} A + \alpha_k E)T = O,$$

$$\alpha_0(T^{-1}A^kT) + \alpha_1(T^{-1}A^{k-1}T) + \dots + \alpha_{k-1}(T^{-1}AT) + \alpha_k E = O,$$

$$\alpha_0(T^{-1}AT)^k + \alpha_1(T^{-1}AT)^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1}(T^{-1}AT) + \alpha_k E = O,$$

окончательно,

$$\alpha_0 B^k + \alpha_1 B^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} B + \alpha_k E = O, \text{ т.е. } f(B) = O.$$

Но если у матриц A и B совпадают множества многочленов, которые ими аннулируются, то, очевидно, совпадают и минимальные многочлены. ■

ГЛАВА 3. РАНГ МАТРИЦЫ

§1. Линейная зависимость и линейная независимость строк (столбцов)

Напомним (см. §2 из главы 1 этого раздела), что линейной комбинацией строк (или вообще матриц) u_1, u_2, \dots, u_m с коэффициентами c_1, c_2, \dots, c_m (c_i — числа) называется строка (матрица) $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_m u_m$. Если все коэффициенты c_i равны нулю, то линейная комбинация называется тривиальной. Ясно, что тривиальная линейная комбинация равна нулевой строке (матрице). Всякая линейная комбинация, которая не является тривиальной, называется нетривиальной.

Пример 1. Найдите линейную комбинацию строк $u_1 = (4, 1, 3, -2)$, $u_2 = (1, 2, -3, 2)$, $u_3 = (16, 9, 1, -3)$ с коэффициентами $c_1 = 3$, $c_2 = 5$, $c_3 = -1$.

▲ Имеем $3u_1 + 5u_2 - u_3 = (12, 3, 9, -6) + (5, 10, -15, 10) - (16, 9, 1, -3) = (1, 4, -7, 7)$. ▼

Пример 2. Докажите, что строка x , удовлетворяющая уравнению

$$3(u_1 - x) + 2(u_2 + x) = 5(u_3 + x),$$

где u_1, u_2, u_3 — заданные строки, является их линейной комбинацией, и найдите коэффициенты этой линейной комбинации. Найдите x , если $u_1 = (2, 5, 1, 3)$, $u_2 = (10, 1, 5, 10)$, $u_3 = (4, 1, -1, 1)$.

▲ Преобразуем данное уравнение:

$$3u_1 - 3x + 2u_2 + 2x = 5u_3 + 5x,$$

$$6x = 3u_1 + 2u_2 - 5u_3,$$

$$x = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{3}u_2 - \frac{5}{6}u_3,$$

т.е. строка x есть линейная комбинация строк u_1, u_2, u_3 с коэффициентами $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{6}$ соответственно.

Для данных в условии значений u_1, u_2, u_3 имеем

$$x = \left(1, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right) - \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right) = (1, 2, 3, 4). \quad \blacktriangleleft$$

Совокупность строк u_1, u_2, \dots, u_m называется *линейно зависимой*, если существуют коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_m , не равные нулю одновременно, такие, что $c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_mu_m = 0$ (здесь 0 обозначает нулевую строку). Если же такие коэффициенты не существуют, т.е. из равенства $c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_mu_m = 0$ следует, что все коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_m равны нулю, то совокупность строк называется *линейно независимой*. Иными словами, совокупность строк u_1, u_2, \dots, u_m является линейно зависимой, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевой строке, и линейно независимой, если только тривиальная линейная комбинация этих строк равна нулевой строке.

Например, строки $u_1 = (4, -2, 6)$, $u_2 = (6, -3, 9)$ линейно зависимы, поскольку $3u_1 - 2u_2 = 0$. Также линейно зависимы строки $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 2, 1)$, $u_3 = (1, 4, 3)$, ибо $2u_1 + u_2 - u_3 = 0$. Строки $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (-1, 2)$, равно как и строки $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (3, 6, 7)$, линейно

независимы. Действительно, две строки u_1, u_2 линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны: если $c_1u_1 + c_2u_2 = 0$, где $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, то, считая без ограничения общности, что $c_1 \neq 0$, имеем $u_1 = -\frac{c_2}{c_1}u_2$. Легко видеть, что в обеих парах строки u_1 и u_2 не пропорциональны. Линейно независимы строки единичной матрицы E_n порядка n .

Предложение 1. Для того чтобы совокупность строк была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одна из строк была линейной комбинацией остальных.

□ Действительно, пусть совокупность строк u_1, u_2, \dots, u_m линейно зависима. Это значит, что существуют числа c_1, c_2, \dots, c_m , не равные одновременно нулю, такие, что $c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_mu_m = 0$. Пусть $c_i \neq 0$. Тогда

$$u_i = -\frac{c_1}{c_i}u_1 - \dots - \frac{c_{i-1}}{c_i}u_{i-1} - \frac{c_{i+1}}{c_i}u_{i+1} - \dots - \frac{c_m}{c_i}u_m.$$

Необходимость доказана.

Пусть теперь $u_i = c_1u_1 + \dots + c_{i-1}u_{i-1} + c_{i+1}u_{i+1} + \dots + c_mu_m$. Тогда $c_1u_1 + \dots + c_{i-1}u_{i-1} + (-1)u_i + c_{i+1}u_{i+1} + \dots + c_mu_m = 0$, где $c_1^2 + \dots + c_{i-1}^2 + (-1)^2 + c_{i+1}^2 + \dots + c_m^2 \neq 0$, т.е. совокупность u_1, \dots, u_m линейно зависима. ■

Другая формулировка предложения 1:

Для того чтобы совокупность строк была линейно независима, необходимо и достаточно, чтобы ни одна из строк не была линейной комбинацией остальных.

Отметим еще некоторые очевидные предложения, касающиеся свойств линейной зависимости и независимости.

Ясно, что любая совокупность строк, содержащая нулевую строку, линейно зависима. Действительно, нулевая строка есть линейная комбинация остальных строк с нулевыми коэффициентами. Столь же ясно, что всякая совокупность строк, содержащая две равные или две пропорциональные строки, линейно зависима. Далее, если совокупность строк линейно зависима, то всякая большая совокупность будет также линейно зависима. Наконец, если совокупность строк линейно независима, то и всякая ее часть линейно независима.

Пример 3. Докажите, что если строки u_1, u_2, u_3 линейно зависимы и строка u_3 не выражается линейно через строки u_1 и u_2 , то строки u_1 и u_2 пропорциональны.

▲ Поскольку строки u_1, u_2, u_3 линейно зависимы, существуют числа c_1, c_2, c_3 , не равные одновременно нулю, такие, что $c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 = 0$. По условию строка u_3 не выражается линейно через строки u_1 и u_2 , следовательно, $c_3 = 0$ и, значит, $c_1u_1 + c_2u_2 = 0$, где хотя бы одно из чисел c_i отлично от нуля. Пусть $c_1 \neq 0$. Тогда $u_1 = -\frac{c_2}{c_1}u_2$, т.е. строки u_1 и u_2 пропорциональны. ▼

Пример 4. Пусть дана совокупность строк

$$\begin{aligned} u_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \\ u_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \\ &\dots \\ u_s &= (a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{sn}), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $s \leq n$. Докажите, что если для всех $j = 1, 2, \dots, s$ выполняется условие

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^s |a_{ij}|, \tag{3.2}$$

то данная совокупность строк линейно независима.

▲ Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что $\sum_{i=1}^s c_i u_i = 0$, где не все числа c_i равны нулю. Пусть c_j — это наибольшее по модулю число среди чисел c_1, \dots, c_s , т.е. $|c_j| = \max_{1 \leq i \leq s} |c_i|$ (если таких чисел несколько, то возьмем любое из них). Рассмотрим j -й элемент строки $\sum_{i=1}^s c_i u_i$. Он равен $\sum_{i=1}^s c_i a_{ij} = c_j a_{jj} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^s c_i a_{ij}$ и отличен от нуля, поскольку в силу условия (3.2) и выбора номера j имеем:

$$\left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^s c_i a_{ij} \right| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^s |c_i| |a_{ij}| \leq |c_j| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^s |a_{ij}| < |c_j| |a_{jj}| = |c_j a_{jj}|,$$

а сумма двух чисел, модули которых различны, не может равняться нулю.

Получили противоречие с условием $\sum_{i=1}^s c_i u_i = 0$. ▼

Замечание. То, что условие (3.2) должно выполняться для всех $j = 1, 2, \dots, s$, существенно, как показывает следующий пример. Пусть $s = 2$, $n \geq s$ — любое и пусть $u_1 = (2, 0, \dots, 0)$, $u_2 = (1, 0, \dots, 0)$. Тогда условие (3.2) выполняется для $j = 1$ и не выполняется для $j = 2$. При этом строки u_1 и u_2 линейно зависимы. Говоря неформально, условие (3.2) означает, что матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix},$$

образованная первыми s элементами строк u_1, u_2, \dots, u_s , “похожа” на диагональную матрицу порядка s с отличными от нуля элементами на диагонали, а строки такой диагональной матрицы, очевидно, линейно независимы. В таком случае (см. ниже предложение 3), линейно независимыми будут и строки матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix},$$

т.е. строки u_1, u_2, \dots, u_s данной совокупности (3.1).

Заметим, наконец, что условие (3.2) нельзя заменить условием $|a_{ij}| \neq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^s |a_{ij}|$. Например, для совокупности строк $u_1 = (1, 3, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 1)$, $u_3 = (2, 2, 0)$

последнее условие выполняется, однако строки u_1, u_2, u_3 линейно зависимы: $u_1 = u_2 + u_3$.

Предложение 2. Пусть строки u_1, \dots, u_m составляют линейно независимую совокупность, а строки u_1, \dots, u_m, u_{m+1} — линейно зависимую. Тогда u_{m+1} есть линейная комбинация u_1, \dots, u_m .

□ Действительно, в равенстве $c_1 u_1 + \dots + c_m u_m + c_{m+1} u_{m+1} = 0$ с не равными одновременно нулю коэффициентами коэффициент c_{m+1} отличен от 0, так как иначе совокупность u_1, \dots, u_m была бы линейно зависимой.

Следовательно, $u_{m+1} = -\frac{c_1}{c_{m+1}} u_1 - \dots - \frac{c_m}{c_{m+1}} u_m$. ■

Строчку $\tilde{u} = (a_1, \dots, a_k)$ будем называть отрезком строки $u = (a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)$.

Предложение 3. *Если между строками u_1, \dots, u_m имеется линейная зависимость, то такая же зависимость имеет место и для их отрезков $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_m$ фиксированной длины.*

□ Действительно, равенство $c_1u_1 + \dots + c_mu_m = 0$ означает, что все элементы строки $c_1u_1 + \dots + c_mu_m$ равны нулю, а равенство $c_1\tilde{u}_1 + \dots + c_m\tilde{u}_m = 0$ означает то же самое для элементов, входящих в отрезки. ■

Отсюда непосредственно следует, что *если некоторые отрезки строк u_1, \dots, u_m линейно независимы, то и сами строки u_1, \dots, u_m составляют линейно независимую совокупность.*

Замечание. Предложение 3 допускает следующее очевидное обобщение. Пусть дана некоторая совокупность строк u_1, u_2, \dots, u_m длины n . Для каждой строки u_i выберем элементы, стоящие на определенных (одних и тех же для всех $i = 1, 2, \dots, m$) местах, сохраняя их порядок. Получим вторую совокупность строк u'_1, u'_2, \dots, u'_m , которую будем называть *укороченной* для первой совокупности. Первую же совокупность строк будем называть *удлиненной* для второй. (Например, укороченной совокупностью для совокупности строк u_1, u_2, \dots, u_n будет совокупность отрезков $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n$ этих строк фиксированной длины k). Тогда справедливо следующее **утверждение**: *любая укороченная совокупность строк для линейно зависимой совокупности строк сама линейно зависима, и, следовательно, любая удлиненная совокупность строк для линейно независимой совокупности строк сама линейно независима.* Доказательство аналогично доказательству предложения 3.

Пример 5. Выясните, является ли следующая система строк

$$u_1 = (1, 0, 0, 2, 5),$$

$$u_2 = (0, 1, 0, 3, 4),$$

$$u_3 = (0, 0, 1, 4, 7),$$

$$u_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$$

линейно независимой.

▲ Рассмотрим строки u_1, u_2, u_3 . Они линейно независимы, поскольку линейно независимы их отрезки $\tilde{u}_1 = (1, 0, 0), \tilde{u}_2 = (0, 1, 0), \tilde{u}_3 = (0, 0, 1)$ (как строки единичной матрицы E_3). Если бы строки u_1, u_2, u_3, u_4 были линейно зависимы, то имели бы в силу предложения 2, что $u_4 = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3$, т.е.

$$\begin{cases} 2 = c_1, \\ -3 = c_2, \\ 4 = c_3, \\ 11 = 2c_1 + 3c_2 + 4c_3, \\ 12 = 5c_1 + 4c_2 + 7c_3. \end{cases}$$

Полученная система, однако, решений не имеет: последнее уравнение не выполняется при $c_1 = 2$, $c_2 = -3$, $c_3 = 4$. Следовательно, строки u_1, u_2, u_3, u_4 линейно независимы. ▼

Предложение 4. Пусть u_1, \dots, u_m — строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

причем строки u_{k+1}, \dots, u_m являются линейными комбинациями строк u_1, \dots, u_k . Пусть, далее, v_1, \dots, v_n — столбцы матрицы A , а $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n$ — их отрезки длины k . Тогда из любой зависимости $c_1\tilde{v}_1 + \dots + c_n\tilde{v}_n = 0$ следует зависимость $c_1v_1 + \dots + c_nv_n = 0$.

Это предложение обращает при сделанных ограничениях предложение о линейной зависимости отрезков линейно зависимых строк (здесь — столбцов).

□ Пусть

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= b_{k+1,1}u_1 + \dots + b_{k+1,k}u_k, \\ &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ u_m &= b_{m1}u_1 + \dots + b_{mk}u_k. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть, далее, $c_1\tilde{v}_1 + \dots + c_n\tilde{v}_n = 0$. Это означает, что первые k элементов столбца $c_1v_1 + \dots + c_nv_n$ равны нулю. Рассмотрим $(k+1)$ -й элемент. Он равен

$$c_1a_{k+1,1} + \dots + c_na_{k+1,n}.$$

Но, в силу (1),

$$\begin{aligned} a_{k+1,1} &= b_{k+1,1}a_{11} + \dots + b_{k+1,k}a_{k1}, \\ &\quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{k+1,n} &= b_{k+1,1}a_{1n} + \dots + b_{k+1,k}a_{kn}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$c_1a_{k+1,1} + \dots + c_na_{k+1,n} = b_{k+1,1}(c_1a_{11} + \dots + c_na_{1n}) + \dots + b_{k+1,k}(c_1a_{k1} + \dots + c_na_{kn}).$$

В скобках находятся первые k элементов столбца $c_1v_1 + \dots + c_nv_n$. Все они равны нулю. Следовательно, равен нулю и вычисленный нами $(k+1)$ -й элемент. Аналогично доказывается равенство нулю всех остальных элементов.

Предложение 4 доказано. ■

Предложение 5(теорема о линейной зависимости линейных комбинаций). Пусть u_1, \dots, u_m и v_1, \dots, v_k — две совокупности строк, и все строки второй совокупности суть линейные комбинации строк первой. Тогда, если $k > m$, совокупность v_1, \dots, v_k линейно зависима.

□ Доказательство проведем методом математической индукции по числу комбинируемых строк. Для $m=1$ утверждение почти очевидно. Пусть $v_1 = c_1u_1, \dots, v_k = c_ku_1$. Если $c_1 = 0$, то совокупность v_1, \dots, v_k линейно зависима, так как содержит нулевую строку. Если $c_1 \neq 0$, то имеется линейная зависимость

$$(-c_2)v_1 + c_1v_2 + 0 \cdot v_3 + \dots + 0 \cdot v_k = 0.$$

Допустим теперь, что утверждение верно для совокупности из $m-1$ комбинируемых строк, и в этом предположении докажем его для совокупности из m строк. Пусть

$$\begin{aligned} v_1 &= c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + \dots + c_{1m}u_m, \\ v_2 &= c_{21}u_1 + c_{22}u_2 + \dots + c_{2m}u_m, \\ &\quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ v_k &= c_{k1}u_1 + c_{k2}u_2 + \dots + c_{km}u_m. \end{aligned}$$

Если $c_{11} = c_{21} = \dots = c_{k1} = 0$, то утверждение верно, так как тогда v_1, \dots, v_k являются линейными комбинациями $m-1$ строк u_2, \dots, u_m . Пусть один из этих коэффициентов отличен от нуля. Без нарушения общности можно считать, что $c_{11} \neq 0$. Рассмотрим строки:

$$v'_2 = v_2 - \frac{c_{21}}{c_{11}} v_1 = c'_{22} u_2 + \dots + c'_{2m} u_m,$$

· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

$$v'_k = v_k - \frac{c_{k1}}{c_{11}} v_1 = c'_{k2} u_2 + \dots + c'_{km} u_m.$$

Вновь построенные $k-1$ строк являются линейными комбинациями $m-1$ строк u_2, \dots, u_m . Так как $k > m$, то $k-1 > m-1$. В силу индуктивного предположения строки v'_2, \dots, v'_k образуют линейно зависимую совокупность. Это значит, что существуют не равные одновременно нулю коэффициенты b_2, \dots, b_k такие, что

$$b_2 v'_2 + \dots + b_k v'_k = 0.$$

В последнее соотношение подставляем выражения для строк v'_2, \dots, v'_k через строки v_1, \dots, v_k . Получим

$$b_2 \left(v_2 - \frac{c_{21}}{c_{11}} v_1 \right) + \dots + b_k \left(v_k - \frac{c_{k1}}{c_{11}} v_1 \right) = 0,$$

откуда

$$-\frac{b_2 c_{21} + \dots + b_k c_{k1}}{c_{11}} v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_k v_k = 0.$$

Теорема доказана. ■

Следствие 1. Любая совокупность строк длины n , содержащая более чем n строк, линейно зависима.

□ Действительно, любая строка (a_1, \dots, a_n) длины n может быть представлена так:

$$a_1 (1, 0, \dots, 0) + a_2 (0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + a_n (0, 0, \dots, 0, 1),$$

т.е. является линейной комбинацией некоторых n вполне определенных строк. В силу только что доказанной теоремы, если число строк больше n , то их совокупность линейно зависима. ■

Замечание. Рассмотрим совокупность квадратных матриц A порядка n с определенными обычным образом операциями сложения матриц и умножения матрицы на число. Условимся матрицу A порядка n записывать следующим образом в виде строки a , содержащей n^2 элементов: сначала записываем подряд элементы 1-й строки матрицы A , затем 2-й, 3-й, ..., n -й строки. Ясно, что при этом сложению матриц A и B и умножению матрицы A на число α отвечает сложение соответствующих матрицам A и B строк a и b и умножение на число α строки a . В

таком случае, следствие 1 означает, что *любые* $n^2 + 1$ квадратные матрицы порядка n линейно зависимы. В частности, линейно зависимы матрицы $E, A, A^2, \dots, A^{n^2}$, где A — произвольная матрица порядка n , т.е. для любой матрицы A порядка n существуют не равные одновременно нулю числа $c_1, c_2, \dots, c_{n^2+1}$ такие, что выполняется равенство

$$c_1 A^{n^2} + c_2 A^{n^2-1} + \dots + c_{n^2-1} A^2 + c_{n^2} A + c_{n^2+1} E = 0.$$

Иными словами, для любой матрицы A порядка n существует *ненулевой* многочлен

$$f(x) = c_1 x^{n^2} + c_2 x^{n^2-1} + \dots + c_{n^2-1} x^2 + c_{n^2} x + c_{n^2+1},$$

который *аннулируется* матрицей A . Мы, таким образом, получили простое и не зависящее от теоремы Гамильтона-Кэли доказательство существования многочлена $f(x)$, аннулируемого матрицей A .

Следствие 2. Пусть даны m строк u_1, u_2, \dots, u_m и простираны k их линейных комбинаций v_1, v_2, \dots, v_k . Тогда если совокупность строк v_1, v_2, \dots, v_k линейно независима, то $k \leq m$.

□ Действительно, если бы выполнялось неравенство $k > m$, то строки v_1, v_2, \dots, v_k были бы линейно зависимы. ■

Предложение 6 (критерий линейной зависимости строк квадратной матрицы). Для линейной зависимости множества строк квадратной матрицы необходимо и достаточно обращение в нуль ее *детерминанта*.

□ Пусть дана квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Необходимость. Пусть строки матрицы A линейно зависимы. Тогда, согласно предложению 1, какая-то из строк есть линейная комбинация остальных. В таком случае, в силу следствия 2 из свойства 5° определителей, заключаем, что $\det A = 0$.

Можно рассуждать и так. Обозначим u_1, u_2, \dots, u_n строки матрицы A . Если они линейно зависимы, то существуют не равные одновременно нулю числа c_1, c_2, \dots, c_n , такие, что выполняется равенство $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = 0$. Положим $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, тогда это равенство можно записать в виде

$$cA = 0. \quad (1)$$

Если $\det A \neq 0$, то существует обратная матрица A^{-1} . Умножая левую и правую части равенства (1) справа на A^{-1} , получаем:

$$c = c(AA^{-1}) = (cA)A^{-1} = 0A^{-1} = 0,$$

т.е. c — нулевая строка. Получили противоречие. Следовательно, условие $\det A = 0$ необходимо для линейной зависимости строк A .

Достаточность. Доказательство достаточности проведем методом математической индукции по порядку матрицы A (3.3). Для $m=1$ утверждение теоремы очевидно, ибо равенство $\det A = 0$ означает, что A состоит из нулевого элемента. Пусть для матриц порядка $m-1$ теорема доказана, и в этом предположении докажем ее для матриц порядка m . Без нарушения общности можно считать $a_{11} \neq 0$. Обозначим через u_1, u_2, \dots, u_n строки матрицы A и введем в рассмотрение строки

$$v_2 = u_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} u_1 = (0, a'_{22}, \dots, a'_{2n}),$$

.

$$v_n = u_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} u_1 = (0, a'_{n2}, \dots, a'_{nn}).$$

По свойству определителей

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}.$$

Далее, $\det A = 0$, $a_{11} \neq 0$, следовательно, $\begin{vmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix} = 0$. По ин-

дуктивному предположению, строки $(a'_{22}, \dots, a'_{2n}), \dots, (a'_{n2}, \dots, a'_{nn})$ линейно зависимы, а тогда линейно зависимы и строки v_2, \dots, v_n с теми же коэффициентами. Итак, существуют не равные одновременно нулю коэффициенты c_2, \dots, c_n такие, что $c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$, и тогда

$$-\left(\frac{a_{21}}{a_{11}} c_2 + \dots + \frac{a_{n1}}{a_{11}} c_n\right) u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = 0.$$

Предложение 6 полностью доказано. ■

Замечание. Условие $\det A = 0$ является необходимым и достаточным для линейной зависимости столбцов квадратной матрицы.

Пример 6. Выясните, являются ли следующие совокупности строк линейно зависимыми или линейно независимыми:

$$\begin{array}{ll} 1) \quad u_1 = (2, -3, 1), & 2) \quad u_1 = (4, -5, 2, 6), \\ u_2 = (3, -1, 5), & u_2 = (2, -2, 1, 3), \\ u_3 = (1, -4, 3); & u_3 = (6, -3, 3, 9), \\ & u_4 = (4, -1, 5, 6). \end{array}$$

▲ 1) Положим

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 0 & -14 \\ 3 & -1 & 5 \\ -11 & 0 & -17 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ -11 & 0 & -17 \end{vmatrix} = -7(17 - 22) = 35 \neq 0,$$

на основании предложения 6 заключаем, что строки u_1, u_2, u_3 линейно независимы.

2) Положим

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 3 & 9 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

и вычислим определитель матрицы A . Имеем, вычитая из 1-й и 4-й строк удвоенную 2-ю и из 3-й строки утроенную 2-ю:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

поскольку 1-я и 3-я строки (а также 1-й и 4-й столбцы) у получившегося определителя пропорциональны. На основании предложения 6 заключаем, что строки матрицы A , т.е. строки u_1, u_2, u_3, u_4 , линейно зависимы. ▼

Пусть дано конечное или бесконечное множество строк длины n , содержащее хотя бы одну ненулевую строку. В нем существуют линейно независимые подмножества, содержащие не более n строк (следствие 1 предложения 5). Среди них существуют максимальные, содержащие наибольшее число строк.

Пример 6'. Найдите все максимальные линейно независимые подмножества множества строк

$$u_1 = (4, -1, 3, -2),$$

$$u_2 = (8, -2, 6, -4),$$

$$u_3 = (3, -1, 4, -2),$$

$$u_4 = (6, -2, 8, -4).$$

▲ Заметим, что строки u_1 и u_2 , а также u_3 и u_4 пропорциональны: $u_2 = 2u_1$, $u_4 = 2u_3$. Строки u_1 и u_3 непропорциональны, следовательно, они линейно независимы. Таким образом, u_1, u_3 — линейно независимое подмножество данного множества строк, а каждое из подмножеств $\{u_1, u_3, u_2\}$, $\{u_1, u_3, u_4\}$, $\{u_1, u_3, u_2, u_4\}$ — линейно зависимо (содержит строку, линейно выражающуюся через u_1 и u_3 , см. предложение 1).

Аналогично убеждаемся, что подмножества $\{u_1, u_4\}$, $\{u_2, u_3\}$, $\{u_2, u_4\}$ линейно независимы, а любое из подмножеств, которое получается из них добавлением хотя бы одной из оставшихся строк, является линейно зависимым.

Итак,

$$\{u_1, u_3\}, \{u_1, u_4\}, \{u_2, u_3\}, \{u_2, u_4\} \quad (1)$$

— это все линейно независимые подмножества, содержащие две строки, а линейно независимых подмножеств, содержащих более двух строк, не существует, т.е. подмножества (1) — это все максимальные линейно независимые подмножества данной совокупности строк. ▼

Заметим, что число строк в каждом из подмножеств (1) одинаково. Ниже будет показано, что этот результат носит общий характер (см. предложение 8).

Предложение 7. Все строки данного конечного или бесконечного множества строк длины n являются линейными комбинациями строк любого максимального линейно независимого подмножества.

□ Пусть u_1, \dots, u_m — строки, образующие максимальное линейно независимое подмножество, и пусть u — какая-либо строка исходного мно-

жества. Тогда совокупность u_1, \dots, u_m , и линейно зависима, и, в силу предложения 2, и есть линейная комбинация u_1, \dots, u_m . ■

Линейно независимая совокупность строк, линейными комбинациями которых являются все строки рассматриваемого множества, называется *базисной* или *фундаментальной* совокупностью, короче, *базисом* данного множества строк. Предложение 7 означает, что *любое максимальное линейно независимое подмножество данной совокупности строк является ее базисом*. Так, подмножества (1) — это все базисы совокупности строк из примера 6.

Замечание. Обычно в понятие (определение) базиса включается требование упорядоченности входящих в него строк. Поскольку, однако, для рассматриваемых задач упорядоченность несущественна, мы это требование в определение не включаем.

Пример 7. Найдите все базисы данной совокупности строк:

$$\begin{array}{ll} 1) \quad u_1 = (1, 2, 0, 0), & 2) \quad u_1 = (1, 2, 3, 4), \\ u_2 = (1, 2, 3, 4), & u_2 = (2, 3, 4, 5), \\ u_3 = (3, 6, 0, 0); & u_3 = (3, 4, 5, 6), \\ & u_4 = (4, 5, 6, 7). \end{array}$$

▲ 1) Строки u_1 и u_3 пропорциональны: $u_3 = 3u_1$, следовательно, в базис может входить только одна из них. Стока u_2 не пропорциональна строкам u_1 и u_3 . Это означает, что $\{u_1, u_2\}$ и $\{u_2, u_3\}$ — все базисы данной совокупности строк.

2) Легко видеть, что любые две строки линейно независимы (их элементы не пропорциональны). Рассмотрим подмножества, содержащие три строки. Их всего $C_4^3 = 4$: $\{u_1, u_2, u_3\}$, $\{u_1, u_2, u_4\}$, $\{u_1, u_3, u_4\}$ и $\{u_2, u_3, u_4\}$. Покажем, что все эти подмножества являются линейно зависимыми.

Имеем

для подмножества $\{u_1, u_2, u_3\}$: $2u_2 = u_1 + u_3$,

для подмножества $\{u_1, u_2, u_4\}$: $3u_2 = 2u_1 + u_4$,

для подмножества $\{u_1, u_3, u_4\}$: $3u_3 = u_1 + 2u_4$,

для подмножества $\{u_2, u_3, u_4\}$: $2u_3 = u_2 + u_4$.

Отсюда в силу предложения 1 следует линейная зависимость каждого из этих подмножеств.

Поскольку совокупность строк $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ содержит линейно зависимое подмножество, она сама является линейно зависимой. Таким обра-

зом, базисом данной совокупности строк являются ее любые две строки u_i , u_j , $i \neq j$. Мы вновь, как и в примере 6, убеждаемся, что число строк, входящих в базис, одинаково для всех базисов. ▼

Предложение 8. Число строк, составляющих базис, не зависит от его выбора.

□ Действительно, пусть u_1, \dots, u_m и v_1, \dots, v_k — два базиса одного и того же множества строк. Так как v_1, \dots, v_k — линейно независимая совокупность строк, являющихся линейными комбинациями строк u_1, \dots, u_m , должно быть $k \leq m$. По тем же соображениям $m \leq k$, так что $m = k$, что и требовалось доказать. ■

Число строк, составляющих базис данной совокупности строк, называется *рангом* этой совокупности. Разумеется, тот же термин применяется к совокупностям столбцов.

Предложение 9. Даны две совокупности строк такие, что вторая из них содержит первую. Если их ранги одинаковы, то все строки второй совокупности являются линейными комбинациями строк первой совокупности.

□ Действительно, выберем базис первой совокупности. Так как ранги равны, выбранные строки образуют базис и для второй совокупности, и все ее строки являются линейными комбинациями этого базиса. ■

Пример 8. Докажите, что если данная совокупность строк имеет ранг r , то любые r ее линейно независимых строк образуют базис этой совокупности.

□ Пусть u_1, u_2, \dots, u_r — любые r линейно независимых строк данной совокупности ранга r , и пусть v — произвольная строка этой совокупности. Тогда строки u_1, u_2, \dots, u_r, v линейно зависимы, поскольку в противном случае ранг данной совокупности был бы не меньше $r+1$. Теперь на основании предложения 2 заключаем, что строка v является линейной комбинацией строк u_1, u_2, \dots, u_r , и так как v — произвольная строка из данной совокупности, то u_1, u_2, \dots, u_r — ее базис. ■

Пример 9. Докажите, что любое линейно независимое подмножество данной совокупности строк можно дополнить до базиса этой совокупности.

□ Пусть r — ранг данной совокупности строк, s — число строк рассматриваемого линейно независимого подмножества. Если $s = r$, то в силу результата примера 8 заключаем, что строки рассматриваемого подмножества уже образуют базис данной совокупности. Пусть $s < r$, а u_1, u_2, \dots, u_s —

строк рассматриваемого подмножества. Тогда в данной совокупности строк имеется строка v , которая не выражается линейно через u_1, u_2, \dots, u_s (в противном случае строки u_1, u_2, \dots, u_s образовывали бы базис, число строк в котором было бы меньше r , что противоречит предложению 8). На основании предложения 2 заключаем, что в таком случае строки u_1, u_2, \dots, u_s, v — линейно независимы. Если $s+1=r$, то процесс дополнения закончен. В противном случае повторим наши рассуждения, взяв за исходное линейно независимое подмножество совокупность $\{u_1, u_2, \dots, u_s, v\}$. И так далее. Не позднее чем через $r-s$ шагов мы получим линейно независимую систему $\{u_1, u_2, \dots, u_s, v, \dots, w\}$, содержащую r строк и являющуюся в силу результата примера 8 базисом данной совокупности строк. ■

Две совокупности строк u_1, \dots, u_m и v_1, \dots, v_k называются *линейно эквивалентными*, если каждая строка первой совокупности есть линейная комбинация строк второй совокупности и каждая строка второй совокупности есть линейная комбинация строк первой.

Предложение 10. Ранги линейно эквивалентных совокупностей строк равны.

□ Пусть r — ранг второй совокупности. Это значит, что все строки второй совокупности являются линейными комбинациями базиса, состоящего из r строк. Но тогда и строки первой совокупности, будучи линейными комбинациями линейных комбинаций этих r строк, сами являются их линейными комбинациями. Следовательно, ранг первой совокупности не больше r , т.е. ранга второй совокупности. По аналогичной причине ранг второй совокупности не больше ранга первой. Следовательно, эти ранги равны. ■

Следствие. Если две линейно независимые совокупности строк линейно эквивалентны, то каждая из них содержит одинаковое число строк.

Замечание 1. Разумеется, из равенства рангов двух совокупностей не следует, вообще говоря, что эти совокупности линейно эквивалентны. Например, совокупности $u_1 = (1, 0)$ и $v_1 = (0, 1)$ не являются линейно эквивалентными, но ранг каждой из них равен 1. Однако справедливо следующее утверждение: *если две совокупности строк имеют одинаковый ранг, и одна из этих совокупностей линейно выражается через другую, то эти совокупности линейно эквивалентны.*

□ Пусть строки u_1, u_2, \dots, u_r образуют базис первой совокупности, строки v_1, v_2, \dots, v_r — базис второй совокупности, и пусть вторая совокупность выражается линейно через первую, следовательно, через ее базис u_1, u_2, \dots, u_r . Рассмотрим третью совокупность строк, являющуюся объединением двух данных совокупно-

стей. Строки u_1, u_2, \dots, u_r образуют ее базис, поэтому ее ранг равен r . Строки v_1, v_2, \dots, v_r линейно независимы, поскольку являются базисом второй совокупности, их число равно r , значит, они также являются базисом третьей совокупности (пример 8). В таком случае, все строки третьей совокупности, следовательно, и все строки первой, линейно выражаются через v_1, v_2, \dots, v_r . Таким образом, первая совокупность линейно выражается через вторую. ■

Замечание 2. Центральным моментом в доказательстве предложения 10 явилось доказательство утверждения о том, что если строки одной совокупности выражаются линейно через строки другой совокупности, то ранг первой совокупности не больше ранга второй.

Пример 10. Даны строки $u_1 = (0, 1, 0, 2, 0)$, $u_2 = (7, 4, 1, 8, 3)$, $u_3 = (0, 3, 0, 4, 0)$, $u_4 = (1, 9, 5, 7, 1)$, $u_5 = (0, 1, 0, 5, 0)$. Можно ли подобрать числа c_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 5$) так, чтобы строки

$$\begin{aligned}v_1 &= c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + c_{13}u_3 + c_{14}u_4 + c_{15}u_5, \\v_2 &= c_{21}u_1 + c_{22}u_2 + c_{23}u_3 + c_{24}u_4 + c_{25}u_5, \\v_3 &= c_{31}u_1 + c_{32}u_2 + c_{33}u_3 + c_{34}u_4 + c_{35}u_5, \\v_4 &= c_{41}u_1 + c_{42}u_2 + c_{43}u_3 + c_{44}u_4 + c_{45}u_5, \\v_5 &= c_{51}u_1 + c_{52}u_2 + c_{53}u_3 + c_{54}u_4 + c_{55}u_5\end{aligned}$$

были линейно независимы?

▲ Предположим, что такие числа c_{ij} подобрать можно. Тогда ранг совокупности строк v_1, v_2, \dots, v_5 равен 5. Оценим ранг совокупности строк u_1, u_2, \dots, u_5 , точнее, покажем, что он меньше 5. Рассмотрим строки u_1, u_3, u_5 . Они линейно зависимы. Действительно, линейно зависимы укороченные строки $u'_1 = (1, 2)$, $u'_3 = (3, 4)$, $u'_5 = (1, 5)$, образованные вторыми и четвертыми элементами строк u_1, u_3, u_5 (укороченные строки имеют длину $n = 2$, а их число равно 3, т.е. больше n). Поэтому существуют не равные одновременно нулю числа α, β, γ такие, что выполняется равенство $\alpha u'_1 + \beta u'_3 + \gamma u'_5 = 0$. Поскольку первые, третьи и пятые элементы строк u_1, u_3, u_5 равны нулю, заключаем, что также справедливо равенство $\alpha u_1 + \beta u_3 + \gamma u_5 = 0$, которое и означает, что строки u_1, u_3, u_5 линейно зависимы. Значит, линейно зависимы строки u_1, u_2, \dots, u_5 , т.е. ранг этой совокупности строк меньше 5. Но в таком случае ранг совокупности v_1, v_2, \dots, v_5

должен быть меньше 5. Получили противоречие. Следовательно, требуемым образом числа c_{ij} подобрать нельзя. ▶

Замечание. Нетрудно явно указать числа α, β, γ , для которых выполняется равенство $\alpha u_1 + \beta u_3 + \gamma u_5 = 0$, причем $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$, например, $\alpha = 11$, $\beta = -3$, $\gamma = -2$.

§2. Теорема о ранге матрицы. Различные способы вычисления ранга матрицы

С данной прямоугольной матрицей связывается множество ее строк и множество ее столбцов. Каждое из них имеет ранг. Замечательно то, что эти ранги равны.

Предложение 11. *Ранг множества строк прямоугольной матрицы равен рангу множества ее столбцов.*

□ Пусть дана прямоугольная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пусть ранг множества ее строк равен k . Тогда найдется базис из k строк, т.е. такое линейно независимое множество строк, что все остальные строки являются их линейными комбинациями. Для упрощения записи будем считать, что это первые k строк, иначе мы изменили бы нумерацию. Введем в рассмотрение матрицу из этих строк

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Столбцы матрицы \tilde{A} являются отрезками столбцов матрицы A .

Выберем базис множества столбцов матрицы \tilde{A} . Пусть число столбцов, составляющих базис, равно r . Все столбцы матрицы \tilde{A} являются их линейными комбинациями. Ясно, что $r \leq k$. Дополним выбранные базисные столбцы до полных столбцов матрицы A . Получившиеся столбцы линейно независимы, и, в силу предложения 4, все столбцы матрицы A являются их линейными комбинациями. Таким образом, мы построили базис множества столбцов матрицы A , состоящий из r столбцов, причем $r \leq k$.