должен быть меньше 5. Получили противоречие. Следовательно, требуемым образом числа c_{ij} подобрать нельзя. ▼

Замечание. Нетрудно явно указать числа α, β, γ, для которых выполняется равенство $\alpha u_1 + \beta u_3 + \gamma u_5 = 0$, причем $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$, например, $\alpha = 11$, $\beta = -3$, $\gamma = -2$.

§2. Теорема о ранге матрицы. Различные способы вычисления ранга матрицы

С данной прямоугольной матрицей связывается множество ее строк и множество ее столбцов. Каждое из них имеет ранг. Замечательно то, что эти ранги равны.

Предложение 11. *Ранг множества строк прямоугольной матрицы равен рангу множества ее столбцов.*

□ Пусть дана прямоугольная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пусть ранг множества ее строк равен k. Тогда найдется базис из k строк, т.е. такое линейно независимое множество строк, что все остальные строки являются их линейными комбинациями. Для упрощения записи будем считать, что это первые k строк, иначе мы изменили бы нумерацию. Введем в рассмотрение матрицу из этих строк

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Столбцы матрицы $\widetilde{A}$ являются отрезками столбцов матрицы A.

Выберем базис множества столбцов матрицы $\widetilde{A}$. Пусть число столбцов, составляющих базис, равно r. Все столбцы матрицы $\widetilde{A}$ являются их линейными комбинациями. Ясно, что $r \leq k$. Дополним выбранные базисные столбцы до полных столбцов матрицы A. Получившиеся столбцы линейно независимы, и, в силу предложения 4, все столбцы матрицы A являются их линейными комбинациями. Таким образом, мы построили базис множества столбцов матрицы A, состоящий из r столбцов, причем $r \leq k$.

Итак, ранг r множества столбцов матрицы A не превосходит ранга k множества ее строк. Но по тем же соображениям ранг k множества строк не превосходит ранга r множества столбцов. Следовательно, эти ранги равны. Их величина называется *рангом* матрицы. Условимся ранг матрицы A обозначать $\operatorname{rg} A$. ■

Сделаем некоторые очевидные замечания, касающиеся ранга матрицы. Ранг матрицы не изменяется при транспонировании: $\operatorname{rg} A^T = \operatorname{rg} A$ (это утверждение, собственно, и составляет содержание предложения 11). Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях ее строк (столбцов). Действительно, при элементарных преобразованиях строк (столбцов) данная совокупность строк (столбцов) заменяется на линейно эквивалентную, а ранги линейно эквивалентных совокупностей строк (столбцов) в силу предложения 10 равны. Далее, приписывание к матрице столбца (строки), равного линейной комбинации ее столбцов (строк), не меняет ранга. Следовательно, при приписывании к матрице одного (произвольного) столбца ранг либо не изменяется (если приписываемый столбец является линейной комбинацией столбцов матрицы), либо увеличивается на 1, а при приписывании k столбцов ранг может увеличиться не более чем на k, точнее, если m — ранг приписываемой совокупности столбцов, то не более чем на m. Иными словами, если число строк у матриц A и B одинаково, то для ранга блочной матрицы $(A \quad B)$ справедлива оценка:

$$\operatorname{rg}(A \quad B) \le \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B. \tag{3.4}$$

Заметим, наконец, что вычеркивание одной строки (столбца) матрицы тогда и только тогда не изменяет ее ранга, когда вычеркнутая строка (столбец) линейно выражается через остальные строки (столбцы): если матрица A' получается из матрицы A вычеркиванием строки (столбца), то матрица A, наоборот, получается из A' (с точностью до перестановки строк (столбцов), которая не изменяет ранга) приписыванием соответствующей строки (столбца).

Пример 1. Докажите, что если матрица A содержит m строк и имеет ранг r, то любые s ее строк образуют матрицу A_s, ранг которой не меньше $r+s-m$.

▲ Если какие-то s строк матрицы A выбраны, то среди оставшихся $m-s$ строк будет не более $m-s$ линейно независимых. Поскольку ранг A по условию равен r, в матрице A имеется ровно r линейно независимых строк, поэтому среди выбранных s строк должно быть не менее $r-(m-s) = r+s-m$ линейно независимых строк. Действительно, если среди s

строк имеется только $l < r + s - m$ линейно независимых, то всего в матрице A имеется не более $(m - s) + l < r$ линейно независимых строк, что противоречит тому, что $r = \operatorname{rg} A$. Итак, среди выбранных s строк имеется не менее $r + s - m$ линейно независимых, следовательно, $\operatorname{rg} A_s \geq r + s - m$. ▼

Пример 2. Докажите, что если столбцы матрицы B являются линейными комбинациями столбцов матрицы A, то $\operatorname{rg} B \leq \operatorname{rg} A$.

▲ Это утверждение уже доказано выше (см. замечание 2 к предложению 10). ▼

Укажем очевидное следствие утверждения из примера 2 (см. также замечания после доказательства предложения 11): если матрица A получается из матрицы B приписыванием некоторого количества столбцов (или, что то же самое, матрица B получается из матрицы A вычеркиванием некоторого количества столбцов), то $\operatorname{rg} B \leq \operatorname{rg} A$. При этом $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$, если приписываемые столбцы являются линейными комбинациями столбцов матрицы B (соответственно, $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A$, если вычеркиваемые столбцы матрицы A являются линейными комбинациями ее оставшихся столбцов).

Пример 3. Докажите, что ранг суммы двух матриц не больше суммы их рангов.

▲ Пусть A и B — данные матрицы одинакового строения. Рассмотрим блочную матрицу $(A \;\; B)$. Поскольку столбцы матрицы $A + B$ являются линейными комбинациями столбцов этой блочной матрицы, в силу результата примера 2, имеем $\operatorname{rg}(A + B) \leq \operatorname{rg}(A \;\; B)$. Теперь, в силу неравенства (3.4), окончательно получаем:

$$\operatorname{rg}(A + B) \leq \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B. \text{ ▼} \tag{3.5}$$

Замечание. Неравенство (3.5) является точным: если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 1$, $A + B = E$, $\operatorname{rg}(A + B) = 2 = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$. Аналогичные примеры можно привести для любого порядка n и вообще для любых размеров $m \times n$ (проделайте это самостоятельно).

Из теоремы об определителе произведения двух квадратных матриц следует, что произведение является вырожденной матрицей, если хотя бы один из сомножителей — вырожденная матрица. Ничего сверх этого указанная теорема не утверждает. Однако вырожденные квадратные матрицы можно еще различать по их рангам. Поэтому совершенно естественным является вопрос: существует ли какая-то зависимость между рангами сомножителей и рангом произведения? Как показывают следующие примеры:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},$$

такой зависимости не существует: в обоих случаях перемножаются матрицы ранга 1, однако в одном случае произведение имеет ранг 1, а в другом — ранг 0. Тем не менее, кое-что определенное, притом не только о ранге произведения квадратных матриц, но и о ранге произведения прямоугольных матриц, сказать можно.

Пример 4. Докажите, что ранг произведения матриц не выше ранга каждого из сомножителей, следовательно, не превосходит наименьшего из этих рангов.

□ Достаточно доказать это утверждение для случая двух сомножителей. Пусть даны прямоугольные матрицы A и B, для которых произведение AB имеет смысл. Обозначим $C = AB$. Как мы знаем (см. §5, глава 2 (блочные матрицы)), k-й столбец матрицы C есть линейная комбинация столбцов матрицы A с коэффициентами $b_{1k}, b_{2k}, \ldots$, равными элементам k-го столбца матрицы B. Следовательно, поскольку столбцы матрицы C линейно выражаются через столбцы матрицы A, ранг матрицы C не больше ранга матрицы A: $\operatorname{rg} C \le \operatorname{rg} A$ (пример 2). Аналогично, поскольку строки матрицы C линейно выражаются через строки матрицы B, получаем: $\operatorname{rg} C \le \operatorname{rg} A$. ■

Итак, если произведение AB имеет смысл, то справедливо неравенство:

$$\operatorname{rg} AB \le \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B). \tag{3.6}$$

В частности, неравенство (3.6) справедливо для любых квадратных матриц A и B одного и того же порядка n.

Следствие. Если один из сомножителей является невырожденной квадратной матрицей, то неравенство (3.6) обращается в равенство, иными словами, *ранг произведения произвольной матрицы A справа или слева на невырожденную квадратную матрицу Q равен рангу матрицы A.*

□ Пусть, например, $AQ = C$. Как доказано, тогда $\operatorname{rg} C \le \operatorname{rg} A$. Однако, поскольку $A = CQ^{-1}$, имеем также $\operatorname{rg} A \le \operatorname{rg} C$. Следовательно, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} C$. Далее, если порядок матрицы Q равен n, то $\operatorname{rg} A \le n$ (у матрицы A всего n столбцов). Поскольку Q — невырожденная матрица, $\operatorname{rg} Q = n$.

Значит, $\min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} Q) = \operatorname{rg} A$, так что неравенство (3.6) в случае невырожденной матрицы $B = Q$ обращается в равенство. ■

Замечание. Как показывает пример матриц $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, для которых $AB = A$, равенства

$$\operatorname{rg} AB = \operatorname{rg} A \text{ и } \operatorname{rg} AB = \operatorname{rg} B$$

могут иметь место и для (ненулевых) вырожденных матриц A и B.

Пример 5. Пусть A и B — произвольные квадратные матрицы порядка n. Докажите, что справедливо неравенство Сильвестра:

$$\operatorname{rg} AB \geq \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B - n. \tag{3.7}$$

□ Как известно (см. замечание к примеру 10 из §6 главы 2 этого раздела), каждая квадратная матрица C порядка n может быть представлена в виде произведения PRQ, где P и Q — неособенные матрицы порядка n, а R — диагональная матрица порядка n, у которой первые r элементов на диагонали равны 1 (r — ранг матрицы C), а все остальные элементы равны нулю.

Пусть $r_1 = \operatorname{rg} A$, $r_2 = \operatorname{rg} B$ и пусть $A = P_1R_1Q_1$ и $B = P_2R_2Q_2$ — указанные представления матриц A и B. Тогда $AB = P_1R_1Q_1P_2R_2Q_2$, и ранг AB равен рангу матрицы R_1CR_2, где $C = Q_1P_2$ — неособенная матрица (пример 4, следствие). Матрица R_1CR_2 получается из матрицы C посредством замены всех элементов последних $n-r_1$ строк и $n-r_2$ столбцов нулями. Ввиду того, что вычеркивание одной строки или одного столбца понижает ранг матрицы не более, чем на 1, ранг R_1CR_2 не меньше $n-(n-r_1)-$ $-(n-r_2) = r_1 + r_2 - n$. Следовательно, $\operatorname{rg} AB = \operatorname{rg} R_1CR_2 \geq \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B - n$. ■

Пример 6. Докажите, что если A и B — квадратные матрицы порядка n и $AB = O$, то $\operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B \leq n$.

▲ Имеем в силу неравенства (3.7):

$$\operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B - n \leq \operatorname{rg} AB = 0. \ ▼$$

Пример 7. Опишите все матрицы размеров $m \times n$ ранга 0 и ранга 1.

▲ Очевидно, что среди всех матриц размеров $m \times n$ только нулевая матрица имеет ранг 0.

Пусть матрица A размеров $m \times n$ имеет ранг 1. Это означает, что, во-первых, матрица A ненулевая, а, во-вторых, что строки матрицы A пропорциональны. Таким образом, в матрице имеется ненулевая строка

$(a_1, a_2, ..., a_n)$ (пусть для определенности это — первая строка A), а все остальные строки получаются из нее умножением на подходящие числовые множители $t_2, ..., t_m$. Следовательно, матрица A может быть записана в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ t_2 a_1 & t_2 a_2 & \dots & t_2 a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_m a_1 & t_m a_2 & \dots & t_m a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix} (a_1\ a_2 \dots a_n),$$

т.е. в виде произведения ненулевого столбца высоты m на ненулевую строку длины n. Таким образом, получено *необходимое* условие, которому удовлетворяет любая матрица размеров $m \times n$ ранга 1.

Покажем, что это условие является *достаточным*. Пусть матрица A представляется в виде произведения столбца $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$ высоты m и строки $\mu = (\mu_1\ \mu_2\ \dots\ \mu_n)$ длины n. Тогда

$$A = \lambda\mu = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & \lambda_1\mu_2 & \dots & \lambda_1\mu_n \\ \lambda_2\mu_1 & \lambda_2\mu_2 & \dots & \lambda_2\mu_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_m\mu_1 & \lambda_m\mu_2 & \dots & \lambda_m\mu_n \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

откуда следует, что строки A пропорциональны, следовательно, $\operatorname{rg} A \le 1$. Если и столбец λ, и строка μ ненулевые, то $\operatorname{rg} A = 1$. В противном случае $\operatorname{rg} A = 0$. Достаточность полученного выше условия доказана. ▼

В качестве следствия доказанного в примере 7 утверждения получим описание всех матриц A третьего порядка, квадраты которых равны нулевой матрице. Положим $r = \operatorname{rg} A$, $B = A$, $n = 3$ в неравенстве (3.7), тогда из условия $A^2 = 0$ следует, что $2r - 3 \le 0$, т.е. либо $r = 0$, либо $r = 1$. В силу результата примера 7 в таком случае имеем (см. (3.8)):

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & \lambda_1\mu_2 & \lambda_1\mu_3 \\ \lambda_2\mu_1 & \lambda_2\mu_2 & \lambda_2\mu_3 \\ \lambda_3\mu_1 & \lambda_3\mu_2 & \lambda_3\mu_3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Остается выяснить, при каких λ_i и μ_j квадрат матрицы A из (1) равен нулю. Непосредственное умножение A на A дает

$$A^2 = (\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3)A,$$

откуда следует, что $A^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} A = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 = 0$.

Пример 8. Вычислите ранг матрицы A, если:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ 2)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

▲ 1) Ясно, что $\operatorname{rg} A \le 4$. Покажем, что в матрице A есть минор 4-го порядка, отличный от нуля, следовательно, в матрице A имеются 4 линейно независимые строки (а именно, четыре строки, в которых расположен этот минор), т.е. $\operatorname{rg} A = 4$. Рассмотрим минор, образованный первыми тремя и последней строкой A. Вычитая последнюю строку из первых трех, получаем:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6 \ne 0.$$

2) Поскольку 2-я и 4-я строки A равны, $\operatorname{rg} A \le 3$. Покажем, что первые три строки линейно независимы, следовательно, $\operatorname{rg} A = 3$. Рассмотрим минор, расположенный в этих строках и в трех последних столбцах. Имеем

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \ne 0,$$

т.е. первые три строки матрицы A действительно линейно независимы. ▼

Те совокупности строк или столбцов, с которыми мы имели дело до сих пор, были устроены столь просто, что не составляло большого труда угадать коэффициенты линейной комбинации, равной нулю, в случае ли-

нейно зависимой совокупности, либо указать отличный от нуля определитель, образованный элементами этих строк (столбцов), в случае линейно независимой совокупности (как, например, в примере 8). Однако нельзя, конечно, рассчитывать на то, что в каждом конкретном случае решение задачи о линейной зависимости будет получено без затруднений. Например, для совокупности строк

$$u_1 = (2, -5, 1, -1),\ u_2 = (1, 3, 6, 5),\ u_3 = (-1, 4, 1, 2)$$

не так-то просто заметить, что справедливо соотношение

$$7u_1 - 3u_2 + 11u_3 = 0.$$

Поэтому нужны какие-то общие приемы (методы), позволяющие решать эту задачу, а, значит, и задачу о нахождении ранга произвольной прямоугольной матрицы. Один из таких методов, состоящий в свед нии задачи к решению (исследованию) системы линейных однородных уравнений относительно коэффициентов искомой линейной зависимости, будет рассмотрен в следующей главе. Здесь мы укажем другой подход к рассматриваемому вопросу, основанный на теореме о ранге матрицы, составляющей содержание предложения 12.

Предложение 12. *Ранг матрицы равен наибольшему порядку отличных от нуля миноров этой матрицы.*

□ Пусть ранг матрицы равен k. Тогда в любом миноре порядка $k+1$ и выше (если их можно составить) будут линейно зависимые строки, и все такие миноры равны нулю. Далее, в матрице имеется базисная совокупность из k строк и базисная совокупность из k столбцов. Рассмотрим подматрицу, образованную элементами из этих строк и столбцов. Ее строки линейно независимы, ибо иначе, в силу предложения 4, соответствующие полные строки исходной матрицы были бы линейно зависимы. Следовательно, определитель порядка k так выбранной подматрицы отличен от нуля. ■

Следствие. *Ранг матрицы не меньше ранга любой ее подматрицы.*

Пусть дана матрица A размеров $m \times n$. Ее минор порядка r называется *базисным*, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $r+1$ равны нулю или миноров порядка $r+1$ в матрице A нет вообще, т.е. r совпадает с меньшим из чисел m или n. Столбцы и строки, на пересечении которых расположен базисный минор, называются *базисными* столбцами и строками. Таким образом, базисные столбцы (строки) образуют базис в совокупности столбцов (строк) матрицы A. Действительно, из теоремы о ранге матрицы и определения базисного минора следует, что его порядок r равен рангу матрицы A, а образующие его строки и столбцы линейно независимы. Единственная матрица, в которой нет базисного минора, — это

нулевая матрица. Ненулевая матрица A может иметь несколько базисных миноров: из предложения 4 следует, что если $\operatorname{rg} A = r$, то минор, стоящий на пересечении любых r линейно независимых строк и любых r линейно независимых столбцов матрицы A, является базисным.

Пример 9. Укажите какой-нибудь базисный минор и определите ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

▲ Поскольку 4-я строка матрицы A равна ее 1-й строке, а 3-я строка является суммой первых двух, любой отличный от нуля минор матрицы A имеет порядок не выше 2. С другой стороны, в матрице A имеются миноры второго порядка, отличные от нуля, например, минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, стоящий на пересечении двух первых строк и двух последних столбцов, минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, стоящий на пересечении 2-й и 3-й строк и 3-го и 4-го столбцов, и так далее. Читатель без труда укажет еще несколько базисных миноров в матрице A. Ранг матрицы A равен 2. ▼

Пример 10. Определите ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

▲ Поскольку минор $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$, стоящий на пересечении двух последних строк и двух последних столбцов матрицы A, отличен от нуля, заключаем, что $\operatorname{rg} A \geq 2$. Остается выяснить, есть ли в матрице A минор третьего порядка, отличный от нуля (миноров более высокого порядка в матрице A нет). Всего в матрице A $C_5^3 = 10$ миноров 3-го порядка.

Поскольку первые два столбца матрицы A пропорциональны, всякий отличный от нуля минор 3-го порядка может содержать только один из них. Поэтому достаточно вычислить миноры 3-го порядка укороченной матрицы

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & 5 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

В матрице A' имеется всего 4 минора 3-го порядка:

$$M_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 7 \\ -1 & 8 & 2 \end{vmatrix}, \quad M_4 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}.$$

Все эти миноры равны нулю. Действительно, $M_2 = 0$, поскольку последний столбец в этом миноре равен разности 2-го и 1-го столбцов. Далее,

$$M_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 10 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} 0 & -26 & -2 \\ 0 & -39 & -3 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -26 & -2 \\ -39 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, $\operatorname{rg} A = 2$. ▼

Теорема о ранге матрицы дает метод для *практического* вычисления ранга матрицы, а поэтому и для решения вопроса о существовании линейной зависимости в данной совокупности строк (столбцов). Этот метод, однако, требует вычисления хотя и конечного, но, быть может, очень большого числа миноров рассматриваемой матрицы. Действительно, в матрице размеров $m \times n$ имеется $C_m^k \cdot C_n^k$ миноров порядка k, в частности, в квадратной матрице порядка n имеется $(C_n^k)^2$ миноров порядка k. Уже при весьма умеренных значениях n и k число $(C_n^k)^2$ будет большим. Например, при $n = 4$, $k = 3$ имеем $(C_n^k)^2 = 16$, а при $n = 5$, $k = 4$ получаем

$(C_n^k)^2 = 25$. С этой точки зрения рассмотренный пример 10 является приятным исключением, поскольку с помощью некоторых дополнительных соображений в примере 10 нам удалось уменьшить число подлежащих вычислению миноров 3-го порядка с 10 до 4. Разумеется, если найден ненулевой минор k-го порядка, то нет необходимости вычислять остальные миноры k-го порядка, нужно сразу переходить к вычислению миноров $(k+1)$-го порядка. Если, однако, ранг матрицы равен $k-1$ (в случае матрицы из примера 10 $k=3$), то нам все же придется вычислить все миноры k-го порядка и убедиться, что они равны нулю.

Ниже приводится другое доказательство теоремы о ранге, основанное на следующей идее, позволяющей значительно упростить вычисление ранга матрицы: если в матрице A существует не равный нулю минор r-го порядка D, такой, что все "*окаймляющие*" его миноры $(r+1)$-го порядка (т.е. миноры, содержащие D целиком внутри себя) равны нулю, то равны нулю вообще все миноры $(r+1)$-го порядка, а, значит, и всех более высоких порядков, т.е. r — ранг матрицы A.

Второе доказательство теоремы о ранге матрицы (метод окаймления миноров)

□ Пусть наибольший порядок отличных от нуля миноров матрицы A равен r. Предположим (это не нарушает общности доказательства), что минор r-го порядка D, стоящий в левом верхнем углу матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & D & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{sr} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{r+1,r+1} & \dots & a_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s,r+1} & \dots & a_{sn} \end{matrix} \end{pmatrix},$$

отличен от нуля, т.е. $D \neq 0$. Тогда первые r столбцов матрицы A линейно независимы. Докажем, что, в таком случае, l-й столбец матрицы A, где $r < l \leq n$, является линейной комбинацией первых r столбцов, т.е. ранг A равен r.

Рассмотрим любое i, $1 \leq i \leq s$, и построим вспомогательный определитель $(r+1)$-го порядка

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{il} \end{vmatrix},$$

получающийся "окаймлением" минора D соответствующими элементами l-го столбца и i-й строки. При любом i определитель D_i равен нулю. Действительно, если $i > r$, то D_i является минором $(r+1)$-го порядка матрицы A и поэтому равен нулю ввиду выбора числа r. Если же $i \le r$, то D_i уже не будет минором матрицы A (он не может быть получен из этой матрицы вычеркиванием некоторых ее строк и столбцов), однако определитель D_i будет содержать теперь две равные строки, следовательно, он равен нулю.

Рассмотрим алгебраические дополнения элементов последней строки определителя D_i. Алгебраическим дополнением для элемента a_{il} служит, очевидно, минор D. Если же $1 \le j \le r$, то алгебраическим дополнением для элемента a_{ij} в определителе D_i будет число

$$A_j = (-1)^{(r+1)+j} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1r} & a_{1l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{r,j-1} & a_{r,j+1} & \dots & a_{rr} & a_{rl} \end{vmatrix}$$

(это число не зависит от i и поэтому обозначено через A_j). Таким образом, разлагая определитель D_i по его последней строке и приравнивая это разложение нулю, поскольку $D_i = 0$, получаем:

$$a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + \dots + a_{ir}A_r + a_{il}D = 0,$$

откуда, ввиду $D \ne 0$, иаходим

$$a_{il} = -\frac{A_1}{D}a_{i1} - \frac{A_2}{D}a_{i2} - \dots - \frac{A_r}{D}a_{ir}.$$

Поскольку это равенство справедливо при всех $i = 1, 2, \dots, s$, а его коэффициенты от i не зависят, заключаем, что l-й столбец матрицы A есть линейная комбинация ее первых r столбцов с коэффициентами $c_1 = -\frac{A_1}{D}$, $c_2 = -\frac{A_2}{D}$, ..., $c_r = -\frac{A_r}{D}$. ■

Итак, мы приходим к следующему правилу вычисления ранга матрицы:

При вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам бóльших порядков. Если уже найден минор k-го порядка D, отличный от нуля, то требуют вычисления лишь миноры $(k+1)$-го порядка, окаймляющие минор D: если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k.

Пример 11. Вычислите ранг матрицы A из примера 10 методом окаймления миноров.

▲ Минор 2-го порядка, стоящий в левом верхнем углу матрицы A, равен нулю. Однако в матрице имеются и отличные от нуля миноры 2-го порядка. Рассмотрим, например, минор $D=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -2 & 5\end{vmatrix}$, образованный первыми двумя строками матрицы A и ее вторым и третьим столбцами. Он отличен от нуля. Выпишем окаймляющие его миноры третьего порядка, их всего 3:

$$M_1=\begin{vmatrix}-1 & 3 & -2\\ -2 & 5 & 1\\ -1 & 1 & 8\end{vmatrix},\ M_2=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 4\\ -2 & 5 & 7\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix},\ M=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & -2 & 5\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}.$$

Равенства $M_1=0, M_2=0$ проверены в примере 10. Имеем

$$M=\begin{vmatrix}-4 & 2 & 3\\ -6 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4 & 2\\ -6 & 3\end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, $\operatorname{rg} A=2$. ▼

Пример 12. Вычислите ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5\end{pmatrix}.$$

▲ Рассмотрим минор

$$D=\begin{vmatrix}-4 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}\neq 0,$$

стоящий на пересечении первых двух строк и второго и третьего столбцов матрицы A. Минор третьего порядка

$$D' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

окаймляющий минор D, отличен от нуля:

$$D' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Однако оба минора четвертого порядка, окаймляющие минор D', равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, ранг матрицы A равен 3. ▼

Пример 13. Выясните, чему равен ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

при различных значениях λ.

▲ Минор $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix}$, стоящий в левом нижнем углу матрицы A, отличен от нуля. Вычислим окаймляющие его миноры третьего порядка, их всего два:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix}, M_2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix}.$$

Имеем:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1-2\lambda & \lambda+2 \\ 0 & 10-\lambda & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-2\lambda & \lambda+2 \\ 10-\lambda & -5 \end{vmatrix} = \lambda^2+2\lambda-15 = (\lambda+5)(\lambda-3),$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 0 & -1-2\lambda & 1 \\ 0 & 10-\lambda & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-2\lambda & 1 \\ 10-\lambda & -1 \end{vmatrix} = 3(\lambda-3).$$

Если $\lambda \neq 3$, то в матрице A есть минор третьего порядка, отличный от нуля, а миноров более высокого порядка нет вообще. Следовательно, при $\lambda \neq 3$ ранг матрицы A равен 3.

Если $\lambda = 3$, то оба окаймляющих минор D минора третьего порядка равны нулю. Следовательно, $\operatorname{rg} A = 2$. ▼

Пример 14. Найдите все значения λ, при которых строка $v = (7, -2, \lambda)$ линейно выражается через строки $u_1 = (2, 3, 5)$, $u_2 = (3, 7, 8)$, $u_3 = (1, -6, 1)$.

▲ Строка v линейно выражается через строки u_1, u_2, u_3 в том и только в том случае, когда ранги совокупностей строк $\{u_1, u_2, u_3\}$ и $\{u_1, u_2, u_3, v\}$ равны. В самом деле, если строка v есть линейная комбинация строк u_1, u_2, u_3, то ее добавление к этим строкам не изменяет числа линейно независимых строк, т.е. ранга совокупности $\{u_1, u_2, u_3\}$. Пусть, наоборот, ранги совокупностей $\{u_1, u_2, u_3\}$ и $\{u_1, u_2, u_3, v\}$ равны. Тогда на основании предложения 9 заключаем, что v есть линейная комбинация u_1, u_2, u_3.

Найдем ранги этих двух совокупностей строк. Рассмотрим совокупность $\{u_1, u_2, u_3\}$. Составим матрицу A, строками которой являются строки u_i, и найдем ее ранг. Имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} 0 & 15 & 3 \\ 0 & 25 & 5 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \neq 0,$$

следовательно, $\operatorname{rg} A = 2$.

Поступая аналогично с совокупностью $\{u_1, u_2, u_3, v\}$, получаем:

$$B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 3 & 7 & 8\\ 1 & -6 & 1\\ 7 & -2 & \lambda\end{pmatrix},\ \begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 7\end{vmatrix}\neq 0,\ \begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ 3 & 7 & 8\\ 1 & -6 & 1\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ 3 & 7 & 8\\ 7 & -2 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ 3 & 7 & 8\\ 0 & -15 & \lambda-18\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 4 & 3\\ 0 & -15 & \lambda-18\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -5 & -1\\ 1 & 4 & 3\\ 0 & -15 & \lambda-18\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-5 & -1\\ -15 & \lambda-18\end{vmatrix}=5\lambda-75$$

(на первом шаге из третьей строки вычли сумму второй строки и удвоенной первой). Таким образом, $\operatorname{rg} B=2$ тогда и только тогда, когда равен нулю второй минор третьего порядка, окаймляющий минор $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 7\end{vmatrix}$, т.е. когда $\lambda=15$.

Следовательно, строка v линейно выражается через строки u_1, u_2, u_3 только при $\lambda=15$. ▼

Замечание. Пример 14 допускает простую геометрическую интерпретацию, именно, будем считать, что строки u_1, u_2, u_3, v — это координаты в некотором базисе векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}$. Тогда векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ компланарны (параллельны некоторой плоскости $\mathcal{P}$), но не коллинеарны (более того, легко видеть, что любые два из них неколлинеарны). При $\lambda=15$ вектор $\boldsymbol{b}$ параллелен той же плоскости $\mathcal{P}$ и выражается через $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ (более того, через любые два из этих векторов), а при $\lambda\neq 15$ он не параллелен плоскости $\mathcal{P}$ и не выражается через эти векторы.

Пример 15. Найдите какой-нибудь базис совокупности строк

$$u_1=(2,-1,3,5),$$
$$u_2=(4,-3,1,3),$$
$$u_3=(3,-2,3,4),$$
$$u_4=(4,-1,15,17),$$
$$u_5=(7,-6,-7,0).$$

▲ Составим матрицу

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 5\\ 4 & -3 & 1 & 3\\ 3 & -2 & 3 & 4\\ 4 & -1 & 15 & 17\\ 7 & -6 & -7 & 0\end{pmatrix},$$

строками которой являются данные строки $u_1, ..., u_5$, и найдем ее ранг. Имеем:

1) $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$, т.е. минор 2-го порядка, стоящий в левом верхнем углу A, отличен от нуля.

2) Окаймляющий D минор 3-го порядка

$$D' = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & -8 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -8 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Остается выяснить, имеются ли среди миноров 4-го порядка, окаймляющих минор D', отличные от нуля (миноров 5-го порядка в матрице A нет).

3) Выпишем оба окаймляющих минора 4-го порядка:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 15 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -8 & -12 \\ -1 & -2 & -3 & -6 \\ 2 & -1 & 12 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -8 & -12 \\ -1 & -3 & -6 \\ 2 & 12 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & -8 & -12 \\ -1 & -3 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} -2 & -12 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 7 & -6 & -7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -8 & -12 \\ -1 & -2 & -3 & -6 \\ -5 & -6 & -25 & -30 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -8 & -12 \\ -1 & -3 & -6 \\ -5 & -25 & -30 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -6 \\ -5 & -25 & -30 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -30 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку оба минора M_1 и M_2 равны нулю, а минор D' отличен от нуля, заключаем, что ранг совокупности $\{u_1, u_2, ..., u_5\}$ равен 3, а один из ее базисов составляют строки u_1, u_2, u_3 (минор D' — базисный). ▼

Изложенный метод окаймления миноров позволяет не только эффективно вычислять ранг данной совокупности строк (столбцов), но и находить

ее базис. В тех случаях, когда нас интересует лишь самый ранг, а не то, какие именно строки (столбцы) составляют базис, целесообразно использовать другой метод, именно метод элементарных преобразований, не связанный с теоремой о ранге матрицы и не требующий вычисления определителей. Как мы знаем, ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях ее строк (столбцов). Поэтому перед тем, как вычислять ранг, матрицу можно упростить с помощью элементарных преобразований ее строк и столбцов.

Матрица вида

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} & c_{1,k+1} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2k} & c_{2,k+1} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & c_{kk} & c_{k,k+1} & \dots & c_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

при $c_{11} \neq 0, c_{22} \neq 0, \dots, c_{kk} \neq 0$ называется *верхней трапециевидной.* Легко видеть, что *ранг трапециевидной матрицы равен* k. Действительно, минор

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & c_{kk} \end{vmatrix} = c_{11}c_{22} \dots c_{kk}$$

отличен от нуля, все же миноры порядка $k+1$ и выше равны нулю, так как у них имеется хотя бы одна нулевая строка.

Предложение 13. *Любая матрица за счет элементарных преобразований над строками и, быть может, перестановок столбцов может быть преобразована в трапециевидную.*

□ Если матрица не нулевая, она содержит ненулевой элемент, который посредством перестановок строк и столбцов можно перевести в левый верхний угол.

Итак, пусть матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ причем } a_{11} \neq 0.$$

Теперь сделаем элементарные преобразования: ко второй строке прибавим первую, умноженную на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, к третьей — первую, умноженную на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$, и т.д. После этих преобразований придем к матрице

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если матрица $\begin{pmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}$ нулевая, процесс окончен. Если нет — то сначала за счет перестановок строк и столбцов добьемся того, чтобы элемент в позиции a'_{22} стал отличен от нуля. Затем добавим к третьей строке вторую, умноженную на $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$, и т.д. Придем к матрице

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a''_{m3} & \dots & a''_{mn} \end{pmatrix}.$$

Продолжаем процесс до тех пор, пока не исчерпаем все строки или не придем к очередной матрице, являющейся нулевой. В результате получим трапециевидную матрицу. ■

Пример 16. Докажите, что любую матрицу C ранга k можно представить в виде произведения $C = PRQ$, где P и Q — неособенные матрицы, а R — прямоугольная матрица тех же размеров, что и C, у которой элементы $r_{11} = r_{22} = \dots = r_{kk} = 1$, а все остальные элементы равны нулю.

□ Как известно, каждое элементарное преобразование строк (столбцов) матрицы C можно реализовать путем ее умножения слева (справа) на соответствующую элементарную матрицу. В силу предложения 13 любая матрица C с помощью элементарных преобразований может быть преобразована в трапециевидную. Это означает, что для любой мат-

рицы C ранга k существуют невырожденные матрицы U и V такие, что матрица UCV имеет вид (3.9) (матрицы U и V являются произведениями нескольких элементарных матриц, которые невырождены). Применив к столбцам матрицы UCV вида (3.9) элементарные преобразования, преобразуем ее к виду

$$R = \begin{array}{c} \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} k \\ \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \end{array} \tag{3.10}$$

(действительно, прибавляя ко 2-му, ..., n-му столбцу первый, умноженный, соответственно, на $-\frac{c_{12}}{c_{11}}, \dots, -\frac{c_{1n}}{c_{11}}$, добьемся того, что первая строка примет вид $(c_{11}\ 0 \dots 0)$, после чего прибавим к 3-му, ..., n-му столбцу получившийся после первого шага второй столбец, умноженный на подходящий множитель, и добьемся того, что вторая строка примет вид $(0\ c_{22}\ 0 \dots 0)$, и так далее; после того, как k-я строка будет преобразована к виду $(0, \dots, 0, c_{kk}, 0, \dots, 0)$, останется умножить первые k строк (или столбцов), соответственно, на $\frac{1}{c_{11}}, \frac{1}{c_{22}}, \dots, \frac{1}{c_{kk}}$). Итак, при некоторых невырожденных матрицах U_1, V_1 имеем

$$U_1 (UCV) V_1 = R,$$

откуда находим

$$C = PRQ, \tag{3.11}$$

где $P = (U_1 U)^{-1}$, $Q = (VV_1)^{-1}$ — неособенные матрицы. Полученное представление (3.11) обобщает на случай прямоугольной матрицы C результат примера 10 из §6 главы 2 этого раздела. ■

Пример 17. Докажите, что любую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга 1, но нельзя представить в виде суммы менее чем r таких матриц.

▲ Пусть C — данная матрица ранга r. Тогда для C справедливо представление (3.11), где матрица R имеет вид (3.10) с r единицами. Представим R в виде суммы r матриц ранга 1:

$$R = R_{11} + R_{22} + \ldots + R_{rr},$$

где у матрицы R_{ii} все элементы равны нулю, кроме одного, расположенного в i-й строке и i-м столбце, равного 1. Тогда

$$C = PR_{11}Q + PR_{22}Q + \ldots + PR_{rr}Q$$

есть сумма r матриц ранга 1, поскольку умножение слева и справа матрицы на неособенную матрицу не изменяет ее ранга. Итак, каждая матрица ранга r может быть представлена в виде суммы r матриц ранга 1.

Докажем, что меньшим числом слагаемых обойтись нельзя. Предположим, что матрица C представлена в виде

$$C = A_1 + A_2 + \ldots + A_k,$$

где $k < r$, $\operatorname{rg} A_i = 1$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда в силу (3.5) получаем:

$$r = \operatorname{rg} C \le \operatorname{rg} A_1 + \operatorname{rg} A_2 + \ldots + \operatorname{rg} A_k = k < r.$$

Получили противоречие. ▼

Пример 18. Вычислите ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

с помощью элементарных преобразований.

▲ Рассмотрим цепочку элементарных преобразований, которые приводят матрицу A к трапециевидной форме (см. доказательство предложения 13). Имеем, переставив для удобства 3-ю строку на место 1-й:

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -39 & -26 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -4 \\ 0 & -39 & -26 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\operatorname{rg} A = 2$. ▼

Пример 19. Вычислите ранг матрицы $A-\lambda E$ при всех значениях параметра λ, если:

$$1)\ A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix};\ 2)\ A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

▲ 1) В этом случае

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 6-\lambda & 4 \\ -2 & -3 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Для вычисления $\operatorname{rg}(A-\lambda E)$ воспользуемся элементарными преобразованиями матрицы $A-\lambda E$. Имеем:

$$A-\lambda E\to\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 6-\lambda & 4 \\ 0 & 3-\lambda & 3-\lambda \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Если $\lambda=3$, то полученная матрица равна $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и имеет ранг 1.

Следовательно, при $\lambda=3$ $\operatorname{rg}(A-\lambda E)=1$.

Если $\lambda\neq 3$, то первую и третью строки можно разделить на $\lambda-3$. В результате придем к матрице

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

ранг которой при $\lambda=2$ равен 2. Следовательно, при $\lambda=2$ $\operatorname{rg}(A-\lambda E)=2$.

Если же $\lambda\neq 3$ и $\lambda\neq 2$, то матрицу B из (1) можно преобразовать в матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

имеющую, как легко видеть, ранг 3. Следовательно, если $\lambda \neq 3$ и $\lambda \neq 2$, то $\operatorname{rg}(A-\lambda E)=3$.

2) В этом случае

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующую цепочку элементарных преобразований матрицы $A-\lambda E$:

$$A-\lambda E \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda^2 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Если $\lambda^2+1=0$, т.е. $\lambda=\pm i$, то последняя матрица в (2) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ее ранг равен 2. Следовательно, при $\lambda=\pm i$ $\operatorname{rg}(A-\lambda E)=2$.

Если $\lambda \neq \pm i$, то последняя матрица в (2) может быть преобразована в матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ранг которой, как легко видеть, равен 4. Следовательно, если $\lambda \neq \pm i$, то $\operatorname{rg}(A-\lambda E)=4$. ▼

Пример 20. Вычислите ранг матрицы A при всевозможных значениях параметра α, если:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha & \alpha\\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2\end{pmatrix};\ 2)\ A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha & \alpha^2\\ 1 & \alpha^2 & \alpha\end{pmatrix}.$$

▲ 1) Вычитая первую строку из двух других, приводим матрицу A к виду:

$$A\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1\\ 0 & \alpha^2-1 & \alpha^2-1\end{pmatrix}.$$

При $\alpha=1$ получившаяся матрица имеет вид $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, ее ранг равен 1.

Следовательно, при $\alpha=1$ $\operatorname{rg}A=1$.

Если $\alpha\neq 1$, то вторую и третью строки можно разделить на $\alpha-1$:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1\\ 0 & \alpha^2-1 & \alpha^2-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & \alpha+1 & \alpha+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Ранг последней матрицы равен 2. Следовательно, при $\alpha\neq 1$ $\operatorname{rg}A=2$.

2) Имеем аналогично предыдущему пункту:

$$A\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \alpha-1 & \alpha^2-1\\ 0 & \alpha^2-1 & \alpha-1\end{pmatrix}.$$

При $\alpha=1$ получившаяся матрица имеет вид $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, ее ранг равен 1.

Следовательно, при $\alpha=1$ $\operatorname{rg}A=1$.

Если $\alpha\neq 1$, то матрицу A можно преобразовать к виду $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & \alpha+1\\ 0 & \alpha+1 & 1\end{pmatrix}$. Определитель последней матрицы равен $1-(\alpha+1)^2=$

$= -\alpha^2 - 2\alpha$ и равен нулю при $\alpha = 0$ и $\alpha = -2$. Следовательно, при $\alpha = 0$ и $\alpha = -2$ $\operatorname{rg} A = 2$. Если же $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq -2$, то $\operatorname{rg} A = 3$. ▼

Пример 21. Найдите значения λ, при которых матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

имеет наименьший ранг. Чему равен ранг при найденных λ и чему он равен при других значениях λ?

▲ Рассмотрим следующую цепочку элементарных преобразований матрицы A:

$$A \to \begin{pmatrix} 0 & -20 & -50 & -5 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

При $\lambda = 0$ ранг получившейся матрицы B, а, значит, и матрицы A, равен 2. Если $\lambda \neq 0$, то матрицу B можно преобразовать так:

$$B \to \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет, как легко видеть, ранг 3. Поэтому при $\lambda \neq 0$ имеем $\operatorname{rg} A = 3$.

Следовательно, матрица A имеет наименьший ранг, равный 2, при $\lambda = 0$. При $\lambda \neq 0$ ее ранг равен 3. ▼

Завершая обсуждение понятия ранга матрицы, сделаем следующее замечание. Первое из двух доказательств теоремы о ранге матрицы существенно использовало предложение 4 и опирающееся на него предложение 11, а также тот факт, что если строки квадратной матрицы линейно независимы, то ее определитель не равен нулю (т.е. утверждение предложения 6 в части достаточности). Второе же доказательство теоремы о ранге матрицы основывалось на совершенно другой идее (окаймление миноров) и никак не использовало ни предложение 4, ни предложение 6. Мы, следовательно, получаем возможность вывести предложения 11 и 6 как следствия из теоремы о ранге, не рискуя попасть при этом в логический круг. Приведем соответствующие доказательства. Сначала докажем предложение 11.

□ Понимая под рангом матрицы ранг совокупности ее столбцов, мы, используя метод окаймления миноров, доказали, что он равен наибольшему порядку отличных от нуля миноров матрицы. Теперь покажем, что тому же самому равен и ранг совокупности строк матрицы, и, значит, ранг совокупности строк матрицы равен рангу совокупности ее столбцов.

Транспонируем матрицу, т.е. сделаем ее строки столбцами, сохраняя их нумерацию. При транспонировании наибольший порядок отличных от нуля миноров матрицы не может измениться, так как транспонирование не меняет определителя, а для всякого минора исходной матрицы минор, полученный из него транспонированием, содержится в новой матрице, и обратно. Отсюда следует, что ранг новой матрицы равен рангу исходной матрицы. Вместе с тем, он равен рангу совокупности столбцов новой матрицы, т.е. рангу совокупности строк исходной матрицы.■

Теперь докажем предложение 6 в части достаточности, т.е. докажем, что если определитель равен нулю, то его строки линейно зависимы.

□ Пусть дан определитель n-го порядка, равный нулю, иными словами, дана квадратная матрица порядка n, единственный минор которой, имеющий наибольший порядок, именно порядок n, равен нулю. Отсюда следует, что наибольший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы меньше n, т.е. ранг матрицы меньше n. Следовательно, строки этой матрицы линейно зависимы. ■

ГЛАВА 4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе рассматриваются системы линейных уравнений общего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4.1}$$

в которых число уравнений m не равно, вообще говоря, числу неизвестных n, решается вопрос об их совместности, а в случае совместной (т.е. имеющей решения) системы излагаются методы отыскания решений и выясняется структура множества ее решений. На протяжении всей главы используется следующая терминология. Матрица