

#### §4. Структура множества решений системы линейных уравнений

В §§2 и 3 были изложены методы, позволяющие провести полное исследование системы линейных уравнений (4.1), включая решение вопроса о совместности системы и (в случае совместной системы) нахождение всех ее решений. В этом параграфе будут изучены свойства решений системы (4.1) и отвечающей ей однородной системы (т.е. однородной системы с той же матрицей  $A$ , что и у системы (4.1)), называемой *приведенной системой* для системы (4.1). Окажется, что существует тесная связь между решениями неоднородной системы и ее приведенной. Начнем с изучения свойств решений однородной системы.

Пусть дана однородная система из  $m$  уравнений с  $n$  неизвестными, которую запишем в матричной форме:

$$Ax = 0, \quad (4.16)$$

где  $A$  — матрица размеров  $m \times n$ ,  $x$  — столбец из неизвестных высоты  $n$ . Такая система всегда совместна:  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  есть решение (разумеется, совместность системы (4.16) следует и из теоремы Кронекера-Капелли, поскольку добавление столбца из нулей не изменяет ранга матрицы). Когда система (4.16) имеет нетривиальные решения? Согласно результатам §3 это будет тогда и только тогда, когда  $\text{rg } A < n$ , т.е. когда строки матрицы сопряженной системы линейно зависимы.

**Предложение 5.** *Если столбцы  $z_1, z_2, \dots, z_k$  — решения системы (4.16), то любая их линейная комбинация  $c_1z_1 + c_2z_2 + \dots + c_kz_k$  также есть решение (4.16).*

□ Действительно, в силу свойств операции умножения матриц имеем:  $A(c_1z_1 + c_2z_2 + \dots + c_kz_k) = c_1Az_1 + c_2Az_2 + \dots + c_kAz_k = 0$ , поскольку  $Az_i = 0$  для всех  $i = 1, 2, \dots, k$ . ■

**Предложение 6.** *Все решения линейной однородной системы (4.16) являются линейными комбинациями  $n - r$  линейно независимых ее решений, где  $n$  — число неизвестных,  $r$  — ранг матрицы коэффициентов  $A$ .*

□ Запишем систему (4.16) в форме

$$x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n = 0,$$

где  $u_1, u_2, \dots, u_n$  — столбцы матрицы коэффициентов. Среди них имеется базис из  $r$  столбцов. Для удобства записи будем считать, что это  $u_1, u_2, \dots, u_r$ , иначе можно изменить нумерацию неизвестных и, вместе с

ними, столбцов. Запишем, что  $u_{r+1}, \dots, u_n$  суть линейные комбинации  $u_1, u_2, \dots, u_r$ . Это приводит к равенствам

$$u_{r+1} = b_{r+1,1}u_1 + b_{r+1,2}u_2 + \dots + b_{r+1,r}u_r,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ u_n = b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots + b_{nr}u_r,$$

откуда следует, что столбцы

$$z_{r+1} = (b_{r+1,1}, \dots, b_{r+1,r}, -1, 0, \dots, 0)^T, \dots, z_n = (b_{n1}, \dots, b_{nr}, 0, \dots, -1)^T$$

дают решения системы. Они, очевидно, линейно независимы. Пусть  $x = (x_1^*, \dots, x_r^*, x_{r+1}^*, \dots, x_n^*)$  — еще какое-нибудь решение системы (4.16).

Тогда  $y = x + x_{r+1}^*z_{r+1} + \dots + x_n^*z_n$  тоже является решением системы (предложение 5). В этом решении все компоненты, начиная с  $(r+1)$ -й, равны 0. Следовательно, и все остальные компоненты равны нулю, ибо столбцы  $u_1, \dots, u_r$  линейно независимы. Итак,  $y = 0$ , т.е.

$$x = -x_{r+1}^*z_{r+1} - \dots - x_n^*z_n.$$

Таким образом,  $z_{r+1}, \dots, z_n$  — такие линейно независимые решения, что все решения являются их линейными комбинациями. Такая совокупность решений называется *базисной* или *фундаментальной*. Выше отмечалось, что буквенное выражение, которое при частных значениях для букв дает все решения данной системы уравнений, называется *общим* решением этой системы. Для системы линейных однородных уравнений общим решением будет линейная комбинация фундаментальной системы с буквенными коэффициентами. ■

Матрица  $\Phi$ , столбцами которой являются решения из фундаментальной совокупности решений для системы (4.16), называется *фундаментальной матрицей* этой системы. Если известна фундаментальная матрица  $\Phi$  системы (4.16), то ее общее решение можно записать в матричной форме:

$$x = \Phi c, \quad (4.17)$$

где

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}$$

— столбец произвольных постоянных.

Предложение 6 устанавливает существование фундаментальной матрицы для произвольной системы (4.16). В примере 1 дается описание всех фундаментальных матриц системы (4.16).

**Пример 1.** Пусть  $\Phi$  — фундаментальная матрица системы (4.16),  $B$  — произвольная невырожденная квадратная матрица порядка  $n - r$ . Тогда  $\Phi B$  — фундаментальная матрица системы (4.16). Любые две фундаментальные матрицы  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  системы (4.16) связаны соотношением

$$\Phi_2 = \Phi_1 C, \quad (4.18)$$

где  $C$  — некоторая невырожденная матрица порядка  $n - r$  (матрица  $C$  зависит от  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ ).

□ Столбцами матрицы  $\Phi B$  являются линейные комбинации столбцов матрицы  $\Phi$ , поэтому согласно предложению 5 столбцы  $\Phi B$  являются решениями системы (4.16). Эти решения линейно независимы. Действительно, положив  $\tilde{\Phi} = \Phi B$ , получаем  $\Phi = \tilde{\Phi} B^{-1}$ , откуда следует, что столбцы матрицы  $\Phi$  являются линейными комбинациями столбцов матрицы  $\tilde{\Phi}$ , т.е. системы (совокупности) столбцов матриц  $\Phi$  и  $\tilde{\Phi}$  линейно эквивалентны, следовательно, имеют одинаковый ранг  $n - r$  (предложение 10 из §1 главы 3). Заметим, наконец, что любое решение системы (4.16) может быть линейно выражено через столбцы матрицы  $\tilde{\Phi}$ , поскольку через эти столбцы линейно выражаются столбцы матрицы  $\Phi$ , а через столбцы матрицы  $\Phi$  линейно выражается любое решение системы (4.16).

Пусть  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — две произвольные фундаментальные матрицы системы (4.16). Поскольку каждый столбец матрицы  $\Phi_i$  является решением системы (4.16), он представляется в виде линейной комбинации столбцов фундаментальной матрицы  $\Phi$ , построенной в предложении 6, иными словами, существует квадратная матрица  $B_i$  порядка  $n - r$ , такая, что выполняется равенство  $\Phi_i = \Phi B_i$ , причем  $B_i$  — невырожденная матрица (если  $\det B_i = 0$ , то  $\operatorname{rg} B_i < n - r$ , так что (пример 4 из §2 главы 3)  $\operatorname{rg} \Phi_i \leq \operatorname{rg} B_i < n - r$ , т.е. столбцы  $\Phi_i$  линейно зависимы, что невозможно). Таким образом, имеем  $\Phi_2 = \Phi B_2$ ,  $\Phi_1 = \Phi B_1$ , откуда  $\Phi_2 = \Phi B_2 = (\Phi_1 B_1^{-1}) B_2 = = \Phi_1 (B_1^{-1} B_2) = \Phi_1 C$ , где  $C = B_1^{-1} B_2$  — невырожденная матрица. ■

**Пример 2.** Решите систему уравнений и укажите ее фундаментальную матрицу:

$$1) \quad x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \quad 2) \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

▲ 1) Пусть  $x_2$  и  $x_3$  — свободные неизвестные, тогда  $x_1 = x_2 - 2x_3$  — общее решение данной системы. Поскольку  $n = 3$ ,  $r = \text{rg } A = 1$ , заключаем, что фундаментальная система решений состоит из 2 линейно независимых решений. Чтобы их найти, возьмем такие значения для  $x_2$  и  $x_3$ :  $x_2 = \alpha_1$ ,  $x_3 = \beta_1$  и  $x_2 = \alpha_2$ ,  $x_3 = \beta_2$ , что определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (1)$$

и найдем соответствующие этим значениям  $x_2$  и  $x_3$  значения  $x_1$ . Имеем, положив  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 0$ :  $x_1 = 1$ ; положив  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 1$ , находим  $x_1 = -2$ . Таким образом, найдены 2 линейно независимых решения данной системы:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , поэтому  $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  — фундаментальная матрица этой

системы. Общее решение имеет вид (см. (4.17)):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

**Замечание 1.** Фундаментальную систему решений, отвечающую определителю (1) вида  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$  или  $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$  (т.е. определителю матрицы, получающейся из единичной матрицы  $E$  перестановкой столбцов (строк)), обычно называют *нормальной фундаментальной системой решений*.

**Замечание 2.** Процедуру представления общего решения системы в виде (2) можно упростить. Именно, запишем равенства:

$$x_1 = x_2 - 2x_3,$$

$$x_2 = x_2,$$

$$x_3 = x_3,$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

что равносильно (2).

**Замечание 3.** Взяв в качестве свободных неизвестных  $x_1$  и  $x_3$ , получим

нормальную фундаментальную матрицу  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; объявив свободными неизвест-

ными  $x_1$  и  $x_2$ , придем к нормальной фундаментальной матрице  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

Нормальными фундаментальными матрицами для данной системы будут также

матрицы  $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ , которые получаются из указанных

матриц перестановкой столбцов.

2) Решим систему методом Гаусса. Преобразуем матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & -6 & -8 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Пусть  $x_4$  — свободное неизвестное, тогда общее решение данной системы имеет вид:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = x_4, \quad x_3 = -x_4.$$

Имеем:

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = x_4,$$

$$x_3 = -x_4,$$

$$x_4 = x_4,$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— матричная форма записи решения. Фундаментальная матрица системы —

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подчеркнем, что в данном случае в качестве свободного неизвестного может выступать любое из неизвестных  $x_2, x_3, x_4$ , но не  $x_1$ . Неизвестное  $x_1$  может быть только базисным.

3) Преобразуем матрицу  $A$  данной системы:

$$\left( \begin{array}{ccccc} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{array} \right).$$

Мы приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 8x_2 - 7x_3 + 25x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Приняв  $x_3, x_4, x_5$  за свободные неизвестные, находим общее решение в виде

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5, \\ x_1 &= 5x_2 - 2x_3 + 16x_4 - 3x_5 = \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5. \end{aligned}$$

Далее имеем:

$$x_1 = \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5,$$

$$x_2 = \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5,$$

$$x_3 = x_3,$$

$$x_4 = x_4,$$

$$x_5 = x_5,$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 19/8 \\ 7/8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 3/8 \\ -25/8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/8 & 3/8 & -1/2 \\ 7/8 & -25/8 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,  $\Phi = \begin{pmatrix} 19/8 & 3/8 & -1/2 \\ 7/8 & -25/8 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  — нормальная фундаментальная

В пунктах 3 и 3 примера 2 мы ис

В пунктах 2 и 3 примера 2 мы искали общее решение однородной системы методом Гаусса. Если, однако, уже известно, каким своим  $r$  линейно независимым уравнениям эквивалентна данная однородная система, то можно использовать метод построения общего решения, изложенный в §3. Пусть данная однородная система (4.16) эквивалентна системе, образованной ее  $r$  первыми уравнениями, и пусть (для упрощения записи) определитель, составленный из первых  $r$  столбцов матрицы этой “укороченной” системы, отличен от нуля (ср. с (4.13)):

где

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4.20)$$

Покажем, что в таком случае фундаментальная система решений для системы (4.16) (или, что равносильно, фундаментальная матрица) может быть найдена по правилу Крамера.

По формулам (4.8) для  $i = 1, 2, \dots, r$  имеем, используя линейность определителя по столбцу:

$$x_i = \frac{D_i}{D} = -x_{r+1} \cdot \frac{d_{r+1}^{(i)}}{D} - \dots - x_n \cdot \frac{d_n^{(i)}}{D}, \quad (4.21)$$

где  $d_{r+1}^{(i)}, \dots, d_n^{(i)}$  — определители, которые получаются из определителя  $D$  (4.20) заменой его  $i$ -го столбца соответственно  $(r+1)$ -м, ...,  $n$ -м столбцом матрицы “укороченной” системы (4.16). Формулы (4.21) дают общее решение системы (4.19), а потому и исходной системы (4.16), и позволяют вы-

писать нормальную фундаментальную систему решений этой системы: записав равенства

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_{r+1} \cdot \frac{d_{r+1}^{(1)}}{D} - \dots - x_n \cdot \frac{d_n^{(1)}}{D}, \\ &\quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_r &= -x_{r+1} \cdot \frac{d_{r+1}^{(r)}}{D} - \dots - x_n \cdot \frac{d_n^{(r)}}{D}, \\ x_{r+1} &= x_{r+1}, \\ &\quad \dots \dots \\ x_n &= x_n \end{aligned}$$

в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{r+1} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{d_{r+1}^{(1)}}{D} \\ \vdots \\ -\frac{d_{r+1}^{(r)}}{D} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{pmatrix} -\frac{d_n^{(1)}}{D} \\ \vdots \\ -\frac{d_n^{(r)}}{D} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{d_{r+1}^{(1)}}{D} & \dots & -\frac{d_n^{(1)}}{D} \\ \vdots & & \vdots \\ -\frac{d_{r+1}^{(r)}}{D} & \dots & -\frac{d_n^{(r)}}{D} \\ 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

получаем нормальную фундаментальную матрицу системы (4.19), значит, и системы (4.16), —

$$\Phi = \begin{pmatrix} -\frac{d_{r+1}^{(1)}}{D} & \dots & -\frac{d_n^{(1)}}{D} \\ \vdots & & \vdots \\ -\frac{d_{r+1}^{(r)}}{D} & \dots & -\frac{d_n^{(r)}}{D} \\ 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Согласно результату примера 1, любая другая фундаментальная матрица получается из матрицы  $\Phi$  (4.23) умножением справа на невырожденную матрицу  $B$  порядка  $n - r$ . Отсюда, в частности, следует, что для того, чтобы найти все фундаментальные системы решений для системы (4.16), нужно, взяв произвольный не равный нулю определитель порядка  $n - r$ , в

качестве значений столбца свободных неизвестных  $(x_{r+1}, \dots, x_n)^T$ . брать последовательно столбцы этого определителя, находя значения неизвестных  $x_1, \dots, x_r$  по формулам (4.21).

**Пример 3.** При каких условиях в общем решении системы уравнений относительно  $x, y, z, t$

$$\begin{cases} y + az + bt = 0, \\ -x + cz + dt = 0, \\ ax + cy - ft = 0, \\ bx + dy + fz = 0 \end{cases}$$

за свободные неизвестные можно принять  $z$  и  $t$ ?

▲ Преобразуем матрицу системы  $A$ :

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & a & b \\ -1 & 0 & c & d \\ a & c & 0 & -f \\ b & d & f & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & a & b \\ -1 & 0 & c & d \\ 0 & c & ac & ad - f \\ 0 & d & f + bc & bd \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & a & b \\ -1 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & ad - bc - f \\ 0 & 0 & f + bc - ad & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Если  $ad - bc - f \neq 0$ , то  $\det A = (ad - bc - f)^2 \neq 0$ , так что данная система имеет только тривиальное решение. Если  $ad - bc - f = 0$ , то данная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} y + az + bt = 0, \\ -x + cz + dt = 0, \end{cases}$$

общее решение которой можно записать в виде:  $x = cz + dt$ ,  $y = -az - bt$ , где  $z$  и  $t$  — свободные неизвестные. ▼

**Пример 4.** Выясните, являются ли матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5 \end{pmatrix}^T \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

фундаментальными матрицами для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

▲ Найдем общее решение данной системы уравнений. Преобразуем матрицу системы:

$$\left( \begin{array}{ccccc} 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & -1 & 11 \\ 1 & 6 & 8 & 5 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc} 0 & -14 & -22 & -14 & 18 \\ 0 & -21 & -33 & -21 & 27 \\ 0 & -21 & -33 & -21 & 27 \\ 1 & 6 & 8 & 5 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 11 & 7 & -9 \\ 1 & 6 & 8 & 5 & -4 \end{array} \right).$$

Мы видим, что данная система эквивалентна системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0, \\ 7x_2 + 11x_3 + 7x_4 - 9x_5 = 0, \end{cases}$$

так что ее общее решение можно записать в виде

$$x_1 = \frac{10}{7}x_3 + x_4 - \frac{26}{7}x_5, \quad x_2 = -\frac{11}{7}x_3 - x_4 + \frac{9}{7}x_5. \quad (1)$$

Поскольку ранг матрицы системы  $r = 2$ , число неизвестных  $n = 5$ , фундаментальная система решений содержит  $n - r = 3$  линейно независимых решения. Следовательно, для ответа на вопрос задачи нужно, во-первых, выяснить, являются ли столбцы матриц  $A$  и  $B$  решениями данной системы, а, во-вторых, найти ранги матриц  $A$  и  $B$ .

Рассмотрим первый столбец матрицы  $A$ . Поскольку формулы (1) дают общее решение данной системы, он является ее решением тогда и только тогда, когда найденные по формулам (1) при  $x_3 = 43$ ,  $x_4 = -50$ ,  $x_5 = -5$  значения  $x_1$  и  $x_2$  равны соответственно 30 и  $-24$ . Непосредственная проверка показывает, что это так. Совершенно аналогично убеждаемся в том, что второй и третий столбцы  $A$  также являются решениями данной системы уравнений, равно как и столбцы  $B$ .

Остается найти ранги матриц  $A$  и  $B$ . Для этого рассмотрим матрицы  $A^T$  и  $B^T$  (это удобнее с точки зрения записи и ничего не меняет по существу, поскольку ранг матрицы не изменяется при транспонировании) и преобразуем их. Поскольку нас интересует собственно ранг, при этом можно использовать элементарные преобразования не только строк, но и столбцов. Имеем:

$$\begin{aligned}
 A^T &= \begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5 \\ 1 & -19 & -10 & 45 & 8 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5 \\ 1 & -19 & -10 & 45 & 8 \\ 0 & 78 & 49 & -200 & -35 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 30 & 546 & 343 & 1400 & -245 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 78 & 49 & -200 & -35 \end{pmatrix} \rightarrow \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 30 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

т.е.  $\operatorname{rg} A = 2$  и, значит,  $A$  не является фундаментальной матрицей.

Далее,

$$\begin{aligned}
 B^T &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 1 & -19 & -10 & 45 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 0 & -8 & -12 & 32 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 46 & 1 & -20 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 13 & 4 \\ 0 & -8 & -12 & 32 & 4 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{vmatrix} 4 & 46 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -12 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 46 & 1 \\ -8 & -12 \end{vmatrix} \neq 0,$$

заключаем, что  $\operatorname{rg} B = 3$ , и, следовательно,  $B$  является фундаментальной матрицей данной системы уравнений. ▼

**Пример 5.** Данная матрица  $A$  является фундаментальной матрицей некоторой однородной системы линейных уравнений. 1) Найдите хотя бы одну нормальную фундаментальную матрицу этой системы. 2) Найдите все нормальные фундаментальные матрицы этой системы. 3) Укажите хотя бы одну однородную систему линейных уравнений, для которой матрица  $A$  является фундаментальной матрицей, если:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \text{ б) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

▲ а) В силу результата примера 1 любая, в том числе и нормальная, фундаментальная матрица системы должна получаться из матрицы  $A$  с помощью линейного комбинирования столбцами  $A$ . Рассмотрим следующие преобразования матрицы  $A$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что матрица  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , равно как и  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ , является

нормальной фундаментальной матрицей системы, отвечающей свободным неизвестным  $x_1$  и  $x_2$ . Совершенно аналогично, рассмотрев преобразования

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем еще 4 нормальные фундаментальные матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (отвечают свободным неизвестным } x_1 \text{ и } x_3\text{)}$$

и  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  (отвечают свободным неизвестным  $x_2$  и  $x_3$ ).

Указанные 6 матриц — это все нормальные фундаментальные матрицы системы с фундаментальной матрицей  $A$ . Тем самым дан ответ на вопросы пунктов 1) и 2).

Для того чтобы ответить на вопрос пункта 3), заметим, что столбец  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  тогда и только тогда является решением искомой однородной системы,

мы, когда существуют числа  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , такие, что справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \\ x_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2, \\ x_3 = 3\alpha_1 + 4\alpha_2. \end{cases} \quad (1)$$

Выразив из двух первых равенств  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  через  $x_1$  и  $x_2$ :  $\alpha_1 = -3x_1 + 2x_2$ ,  $\alpha_2 = 2x_1 - x_2$ , и подставив в третье равенство, мы исключим из системы (1)  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и придем к искомой системе:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \quad (2)$$

б) Преобразовав матрицу  $A$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

заключаем, что всего две матрицы —  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  — являются нормальными фундаментальными матрицами системы. Обе они отвечают свободным неизвестным  $x_2$  и  $x_3$ , базисное неизвестное  $x_1$  в любом решении системы принимает нулевое значение. Таким образом, искомая система имеет вид  $x_1 = 0$ . ▼

**Пример 6.** Укажите однородную систему линейных уравнений, для которой данная матрица  $\Phi$  размеров  $n \times (n-r)$  является фундаментальной матрицей.

▲ Поскольку матрица  $\Phi$  является фундаментальной, ее столбцы линейно независимы, так что  $\text{rg } \Phi = n - r$ . Это значит, что какой-то из определителей порядка  $n - r$  матрицы  $\Phi$  отличен от нуля. Без ограничения общности будем считать, что отличен от нуля определитель, образованный первыми  $n - r$  строками  $\Phi$ . Если  $r = 0$ , то матрица  $A$  искомой системы нулевая. Пусть  $r \neq 0$ .

Запишем матрицу  $\Phi$  в блочной форме:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix},$$

где  $\Phi_1$  — квадратная матрица порядка  $n - r$ ,  $\det \Phi_1 \neq 0$ . Столбец  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

тогда и только тогда является решением системы с фундаментальной матрицей  $\Phi$ , когда существует столбец  $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}$  такой, что  $x = \Phi c$ . Обо-

значив  $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-r} \end{pmatrix}$ ,  $x' = \begin{pmatrix} x_{n-r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , перепишем это равенство в виде двух

равенств:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \Phi_1 c, \\ x' = \Phi_2 c. \end{cases} \quad (1)$$

(2)

Выразив  $c$  из равенства (1):

$$c = \Phi_1^{-1} \tilde{x}$$

и подставив в равенство (2), мы исключим  $c$  из системы (1) — (2) и придем к искомой однородной системе уравнений, записанной в матричной форме:

$$x' = \Phi_2 \Phi_1^{-1} \tilde{x}. \quad (3)$$

Легко видеть, что система (3) содержит  $r$  линейно независимых уравнений. ▼

**Замечание.** В случае примера 5, а) имеем:

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \Phi_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}, \Phi_1^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \Phi_2 \Phi_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix},$$

поэтому по формуле (3) получаем:

$$x_3 = (-1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1 + 2x_2, \text{ т.е.}$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,$$

что совпадает с уравнением (2) из п. а) примера 5.

**Пример 7.** В системе уравнений  $Ax = 0$  ( $x$  — столбец), имеющей фундаментальную матрицу  $\Phi$ , выполнена замена неизвестных  $x = Sy$  ( $\det S \neq 0$ ). Какая система уравнений получится для  $y$ ? Укажите фундаментальную матрицу для этой системы.

▲ Подставив  $x = Sy$  в данную систему уравнений, получим искомую систему линейных уравнений для  $y$ :

$$A(Sy) = (AS)y = 0, \text{ т.е.}$$

$$A'y = 0, \quad (1)$$

где  $A' = AS$ . При этом, поскольку  $S$  — невырожденная матрица,  $\operatorname{rg} A' = \operatorname{rg} A$ .

Поскольку столбцы фундаментальной матрицы  $\Phi$  системы  $Ax = 0$  являются ее решениями, справедливо равенство  $A\Phi = 0$ . Аналогично, если  $\Phi'$  — фундаментальная матрица системы (1), то должно быть  $A'\Phi' = 0$ . Легко видеть, что матрица  $\Phi' = S^{-1}\Phi$  удовлетворяет этому равенству:

$$A' \cdot (S^{-1}\Phi) = (AS) \cdot (S^{-1}\Phi) = A(SS^{-1})\Phi = A\Phi = 0.$$

Матрица  $S^{-1}$  невырожденная, столбцы  $\Phi$  линейно независимы, значит, линейно независимы столбцы матрицы  $\Phi'$ , т.е.  $\Phi'$  — фундаментальная матрица системы (1). ▼

**Пример 8.** Докажите, что если определитель  $D$  порядка  $n > 1$  равен нулю, то алгебраические дополнения соответствующих элементов двух любых строк (столбцов) пропорциональны.

▲ Достаточно доказать утверждение для строк. Обозначим через  $A$  матрицу определителя  $D$ . Поскольку  $D = 0$ , т.е.  $\det A = 0$ , ранг матрицы  $A$  меньше  $n$ . Если  $\operatorname{rg} A \leq n - 2$ , то все алгебраические дополнения  $A_{ij}$  элементов  $A$  равны нулю, т.е. утверждение верно. Пусть  $\operatorname{rg} A = n - 1$ . Рассмотрим однородную систему линейных уравнений с матрицей  $A$ . Фундаментальная система решений такой системы уравнений состоит из одного решения ( $n - r = 1$ ), значит, любые два решения этой системы пропорциональны, т.е. отличаются лишь числовым множителем (быть

может, равным нулю). Остается заметить, что система чисел  $x_1 = A_{11}$ ,  $x_2 = A_{12}, \dots, x_n = A_{1n}$  при любом  $i = 1, 2, \dots, n$  является решением рассматриваемой системы. Действительно, в силу свойства 6° определителей (см. глава 2, §4, формула (2.16) и следствие 2) имеем при всех  $i = 1, 2, \dots, n$ :

$$a_{11}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in} = D = 0,$$

$$a_{k1}A_{i1} + \dots + a_{kn}A_{in} = 0, \text{ если } k \neq i, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

**Пример 9.** Докажите, что если в однородной системе линейных уравнений число уравнений на единицу меньше числа неизвестных, то в качестве решения можно принять систему миноров, полученных из матрицы коэффициентов поочередным вычеркиванием 1-го, 2-го и т.д. столбцов, причем эти миноры берутся с чередующимися знаками. Далее, покажите, что если это решение не нулевое, то любое решение получается из него умножением на некоторое число.

▲ Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

— матрица из коэффициентов данной системы, а  $M_i$  — минор  $(n-1)$ -го порядка, получающийся после вычеркивания из матрицы  $A$  ее  $i$ -го столбца,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Покажем, что одним из решений нашей системы будет система чисел

$$M_1, -M_2, M_3, -M_4, \dots, (-1)^{n-1}M_n, \quad (1)$$

и если это решение не нулевое, то всякое другое решение получается из него умножением на некоторое число. Достаточно, очевидно, рассмотреть случай, когда  $\operatorname{rg} A = n-1$ . Тогда один из миноров  $M_i$  должен быть отличен от нуля, пусть это будет  $M_n$ .

Полагаем в рассматриваемой системе неизвестное  $x_n$  свободным и переносим его в правую часть каждого из уравнений, после этого получим систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} = -a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2,n-1}x_{n-1} = -a_{2n}x_n, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \dots + a_{n-1,n-1}x_{n-1} = -a_{n-1,n}x_n. \end{cases} \quad (2)$$

К системе (2) применимо правило Крамера, которое позволяет записать (после очевидных преобразований, ср. с (4.19) — (4.21)) общее решение в виде

$$x_i = (-1)^{n-i} \frac{M_i}{M_n}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3)$$

Положив  $x_n = (-1)^{n-1} M_n$ , получим:

$$x_i = (-1)^{2n-i-1} M_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

а так как разность  $(2n-i-1) - (i-1) = 2n-2i$  — четное число, то окончательно получаем, что  $x_i = (-1)^{i-1} M_i$ , т.е. система чисел (1) действительно является решением нашей системы уравнений. Любое другое решение этой системы получается из формул (3) при другом числовом значении неизвестного  $x_n$ , и поэтому оно пропорционально решению (1). Понятно, что рассматриваемое утверждение справедливо и в том случае, когда  $M_n = 0$ , но один из миноров  $M_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , отличен от нуля. ▼

**Пример 10.** Пользуясь результатом примера 9, найдите частное и общее решения системы уравнений:

$$1) \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

▲ 1) Матрица системы  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ , поэтому  $M_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -2$ ,

$M_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 6$ ,  $M_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 7$ . Следовательно,  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = -6$ ,  $x_3 = 7$  — частное решение, а  $x_1 = -2t$ ,  $x_2 = -6t$ ,  $x_3 = 7t$  — общее решение данной системы уравнений.

2) Матрица системы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ , поэтому

$$M_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 40 - 45 - 6 = -11,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 27 - 6 = -9,$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Следовательно, частное решение —  $x_1 = -6, x_2 = 11, x_3 = -9, x_4 = 4$ , общее решение —  $x_1 = -6t, x_2 = 11t, x_3 = -9t, x_4 = 4t$ . ▶

Рассмотрим теперь неоднородную систему линейных уравнений

$$Ax = b. \quad (4.5)$$

Установим связь между ее решениями и решениями ее приведенной системы

$$Ax = 0. \quad (4.16)$$

**Предложение 7.** *Общее решение неоднородной системы (4.5) равно сумме ее частного решения и общего решения приведенной системы (4.16).*

□ Пусть  $x_0$  — какое-либо частное решение системы (4.5). Тогда  $Ax_0 = b$ , и система (4.5) равносильна системе  $Ax = Ax_0$ , или  $A(x - x_0) = 0$ . Таким образом,  $x - x_0$  должно быть решением однородной системы (4.16). Понятно, что общее решение системы (4.5) получится, если взять  $x - x_0$  равным общему решению однородной системы (4.16). Отсюда непосредственно следует справедливость предложения 7. ■

**Пример 11.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

▲ Легко увидеть, что  $x_1 = x_2 = x_3 = 1$  дает частное решение системы. Остается найти общее решение приведенной однородной системы. Преобразуем ее матрицу:

$$\left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Мы приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} x_3 = 0, \\ x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

имеющей единственное (тривиальное) решение. Следовательно, данная система имеет единственное решение  $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ .  $\blacktriangleleft$

В заключение рассмотрим несколько примеров, в которых обсуждается вопрос об эквивалентности двух систем уравнений.

**Пример 12.** Докажите, что если эквивалентны совместные системы линейных неоднородных уравнений, то эквивалентны и соответствующие им однородные системы.

$\blacktriangleleft$  Для доказательства достаточно заметить, что всякое решение однородной системы можно представить как разность двух решений соответствующей (совместной) неоднородной системы. Поскольку неоднородные системы эквивалентны, множества их решений совпадают, но тогда совпадают и множества решений однородных систем, т.е. однородные системы эквивалентны.  $\blacktriangledown$

**Пример 13.** Докажите, что системы линейных уравнений  $Ax = 0$  и  $Bx = 0$  ( $x$  — столбец) эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B. \quad (4.24)$$

Здесь  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  — блочная матрица с блоками  $A$  и  $B$ .

$\square$  Пусть системы уравнений  $Ax = 0$  и  $Bx = 0$  эквивалентны, т.е. множества их решений совпадают. Тогда, очевидно, совпадают и фундаментальные системы решений, в частности, они содержат одинаковое число решений. Но в таком случае ранги матриц  $A$  и  $B$  равны,  $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = r$ . Далее, если  $x$  — решение систем  $Ax = 0$  и  $Bx = 0$ , то  $x$  является также

решением системы  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x = 0$ . Отсюда следует, что фундаментальная сис-

тема решений для системы уравнений  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x = 0$  содержит не менее  $n - r$

решений, где  $n$  — число неизвестных  $x_i$ . Пусть  $R = \text{rg} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ . Тогда число

решений, входящих в фундаментальную систему решений системы  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x = 0$ , равно  $n - R$ . Значит,  $n - R \geq n - r$ , т.е.  $R \leq r$ . С другой стороны, очевидно, что  $R \geq r$ . Следовательно,  $R = r$ , и равенства (4.24) доказаны.

Можно рассуждать и так. Мы отмечали, что если  $x$  является решением обеих систем  $Ax = 0$  и  $Bx = 0$ , то  $x$  является также решением системы  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x = 0$ . Легко видеть, что верно и обратное. Следовательно, если системы  $Ax = 0$  и  $Bx = 0$  эквивалентны, то они также эквивалентны системе  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x = 0$ . В таком случае, как показано, ранги матриц всех трех систем равны.

Пусть, наоборот, выполнены равенства (4.24). Рассмотрим системы строк матриц  $A$  и  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ . Их ранги равны, при этом вторая система содержит первую. Согласно предложению 9 из §1 главы 3 отсюда следует, что строки матрицы  $B$  линейно выражаются через строки матрицы  $A$ . Аналогично получаем, что строки  $A$  линейно выражаются через строки  $B$ . Таким образом, совокупности строк  $A$  и  $B$  линейно эквивалентны, т.е. линейно эквивалентны однородные системы уравнений с матрицами  $A$  и  $B$ . Тогда эти системы уравнений эквивалентны в обычном смысле, т.е. множества их решений совпадают. ■

**Замечание.** Из равенства рангов матриц  $A$  и  $B$  не следует, вообще говоря, что системы  $Ax = 0$  и  $Bx = 0$  эквивалентны. Например, если  $A = (1 \ 0)$ ,  $B = (0 \ 1)$

и  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , то указанные системы имеют, соответственно, вид  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 0$  и не являются эквивалентными. Однако  $\text{rg } A = \text{rg } B = 1$ . Заметим, что в этом случае

первое из равенств (4.24) не выполняется:  $\text{rg} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq \text{rg } A$ .

**Пример 14.** Докажите, что совместные системы линейных уравнений  $Ax = a$  и  $Bx = b$  ( $x$  — столбец) эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} A & a \\ B & b \end{pmatrix} = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B. \quad (4.25)$$

Здесь  $\begin{pmatrix} A & a \\ B & b \end{pmatrix}$  — блочная матрица с блоками  $A, a, B, b$ .

□ Пусть совместные системы  $Ax = a$  и  $Bx = b$  эквивалентны, т.е. множества их решений совпадают. В силу результата примера 12 системы  $Ax = 0$  и  $Bx = 0$  также эквивалентны, поэтому (пример 13) справедливы равенства

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B. \quad (1)$$

Пусть  $x$  — решение систем  $Ax = a$  и  $Bx = b$ . Тогда  $x$  — решение системы  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ , т.е. эта система совместна. Следовательно, по теореме Кронекера-Капелли выполняется равенство

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} A & a \\ B & b \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что (4.25) выполняется.

Пусть, наоборот, выполняется (4.25), причем системы  $Ax = a$  и  $Bx = b$  совместны. В силу теоремы Кронекера-Капелли это означает, что

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A a) \text{ и } \operatorname{rg} B = \operatorname{rg}(B b).$$

Из (4.25) следует, что тогда выполняются равенства

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} A & a \\ B & b \end{pmatrix} = \operatorname{rg}(A a) = \operatorname{rg}(B b). \quad (3)$$

Совокупность строк  $\begin{pmatrix} A & a \\ B & b \end{pmatrix}$  содержит совокупность строк  $(A a)$ , а в силу (3) их ранги равны. Поэтому на основании предложения 9 из §1 главы 3 заключаем, что строки совокупности  $(B b)$  суть линейные комбинации строк совокупности  $(A a)$ , иными словами, уравнения системы  $Bx = b$  являются линейными комбинациями уравнений системы  $Ax = a$ . Аналогично убеждаемся, что верно и обратное: каждое уравнение системы  $Ax = a$  есть линейная комбинация уравнений системы  $Bx = b$ . Таким об-

разом, эти системы уравнений линейно эквивалентны, а, значит, и просто эквивалентны. ■

Назовем линейное уравнение *нетривиальным*, если хотя бы один из его коэффициентов при неизвестных отличен от нуля. Из примеров 13 и 14 вытекает следствие: нетривиальные уравнения  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = a$  и  $b_1x_1 + \dots + b_nx_n = b$  эквивалентны тогда и только тогда, когда  $\text{rg} \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n & a \\ b_1 & \dots & b_n & b \end{pmatrix} = 1$ ; в частности, нетривиальные уравнения  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$  и  $b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 0$  эквивалентны тогда и только тогда, когда  $\text{rg} \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} = 1$ .

□ Для доказательства достаточно заметить, что нетривиальное уравнение всегда имеет решение. ■

**Пример 15.** Выясните, эквивалентны ли системы уравнений:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases} \\ 2) \quad & \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = -26, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = -11, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = -67 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 9x_3 - 20x_4 - 3x_5 = -5, \\ x_1 - 11x_2 + 2x_3 + 13x_4 + 4x_5 = 1, \\ 9x_1 - 15x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

▲ 1) Преобразуем расширенную матрицу  $(A|a)$  первой системы:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 7 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -8 & 4 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{array} \right).$$

Мы видим, что  $\text{rg}(A|a) = \text{rg } A = 2$ , так что система совместна.

Аналогично преобразуем расширенную матрицу  $(B|b)$  второй системы:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Следовательно,  $\text{rg}(B|b) = \text{rg } B = 2$ , система совместна.

Теперь используем полученные результаты для вычисления ранга матрицы  $\begin{pmatrix} A & a \\ B & b \end{pmatrix}$ . Имеем:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 7 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & -4 & 2 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Отсюда следует, что  $\text{rg} \begin{pmatrix} A & a \\ B & b \end{pmatrix} = 2 = \text{rg } A = \text{rg } B$ , т.е. равенства (4.25)

выполняются, и, значит, данные системы эквивалентны.

2) Преобразуем расширенную матрицу  $(A \ a)$  первой системы:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & -26 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -11 \\ \hline 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & -67 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & -26 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 15 \\ \hline 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & -15 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & -26 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & -15 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Мы видим, что  $\text{rg}(A \ a) = \text{rg } A = 2$ , система совместна.

Преобразуем расширенную матрицу  $(B \ b)$  второй системы:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 & -5 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 & 1 \\ \hline 9 & -15 & 8 & 5 & 2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & 46 & 1 & -72 & -19 & -9 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 & 1 \\ \hline 0 & 84 & -10 & -112 & -34 & -6 \end{array} \right).$$

Поскольку

$$\begin{vmatrix} 0 & 46 & 1 \\ 1 & -11 & 2 \\ 0 & 84 & -10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 46 & 1 \\ 84 & -10 \end{vmatrix} \neq 0,$$

заключаем, что  $\text{rg } B = \text{rg}(B \ b) = 3$ , система совместна.

Так как  $\operatorname{rg} B \neq \operatorname{rg} A$ , то равенства (4.25) не выполняются. Следовательно, данные системы линейных уравнений не эквивалентны. ▼

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. В перестановке  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  имеется  $k$  инверсий. Сколько инверсий в перестановке  $(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_2, \alpha_1)$ ?

2. Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — произвольные числа,  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  — многочлены от  $x$ , каждый степени не выше  $n-2$ . Докажите, что определитель

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$

равен нулю.

3. Вычислите определители:

$$a) \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \quad (\text{порядка } 2n);$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \dots & C_{n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix};$$

$$r) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n-1}(x_1) & \varphi_{n-1}(x_2) & \dots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}, \text{ где } \varphi_k(x) = x^k + a_{1k}x^{k-1} + \dots + a_{kk};$$