Так как $\operatorname{rg} B \neq \operatorname{rg} A$, то равенства (4.25) не выполняются. Следовательно, данные системы линейных уравнений не эквивалентны. ▼

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. В перестановке $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ имеется k инверсий. Сколько инверсий в перестановке $(\alpha_n, \alpha_{n-1}, ..., \alpha_2, \alpha_1)$?

2. Пусть $a_1, a_2, ..., a_n$ — произвольные числа, $f_1(x)$, $f_2(x), ..., f_n(x)$ — многочлены от x, каждый степени не выше $n-2$. Докажите, что определитель

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$

равен нулю.

3. Вычислите определители:

а) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ (порядка $2n$);

в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \dots & C_{n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n-1}(x_1) & \varphi_{n-1}(x_2) & \dots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$, где $\varphi_k(x) = x^k + a_{1k}x^{k-1} + \dots + a_{kk}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1(x_1-1) & x_2(x_2-1) & \dots & x_n(x_n-1) \\ x_1^2(x_1-1) & x_2^2(x_2-1) & \dots & x_n^2(x_n-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}(x_1-1) & x_2^{n-1}(x_2-1) & \dots & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^{-1} & (a_1+b_2)^{-1} & \dots & (a_1+b_n)^{-1} \\ (a_2+b_1)^{-1} & (a_2+b_2)^{-1} & \dots & (a_2+b_n)^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \dots & (a_n+b_n)^{-1} \end{vmatrix}$ $(a_i+b_j \neq 0,\ i, j = 1, 2, \dots, n)$;

з) $\begin{vmatrix} (b_0+a_0)^n & (b_1+a_0)^n & \dots & (b_n+a_0)^n \\ (b_0+a_1)^n & (b_1+a_1)^n & \dots & (b_n+a_1)^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (b_0+a_n)^n & (b_1+a_n)^n & \dots & (b_n+a_n)^n \end{vmatrix}$.

4. Пусть $\varphi_i(x) = a_{0i} + a_{1i}x + \dots + a_{n-1,i}x^{n-1}$, где $i = 0, 1, \dots, n-1$,

$$D = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_0(x_2) & \dots & \varphi_0(x_n) \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n-1}(x_1) & \varphi_{n-1}(x_2) & \dots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}.$$

5. Пусть α, β, γ — корни уравнения $x^3 + px + q = 0$. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$.

6. Сколько инверсий во всех перестановках n элементов вместе?

7. Докажите, что для любого целого числа k $(0 \le k \le C_n^2)$ существует перестановка чисел $1, 2, 3, \dots, n$, число инверсий в которой равно k.

8. Покажите, что число перестановок чисел $1, 2, ..., n$, содержащих k инверсий, равно числу перестановок тех же чисел, содержащих $C_n^2 - k$ инверсий.

9. Пусть все элементы определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

являются целыми однозначными числами. Обозначим через N_i число, записанное цифрами i-й строки определителя с сохранением их расположения (a_{in} — число единиц, $a_{i,n-1}$ — число десятков и т.д.). Докажите, что значение определителя делится на наибольший общий делитель чисел $N_1, N_2, ..., N_n$.

10. Пусть D — определитель порядка $n > 1$, D' и D'' — определители, полученные из D заменой каждого элемента a_{ij} на его алгебраическое дополнение A_{ij} для D' и на его минор M_{ij} для D''. Докажите, что $D' = D'' = D^{n-1}$. (Определитель D' называется взаимным (или присоединенным) к D.)

11. Найдите наибольшее значение, которое может принимать определитель 3-го порядка, при условии, что все его элементы равны ± 1.

12. Вычислите определитель порядка n, элементы которого заданы условиями:

а) $a_{ij} = \min(i, j)$; б) $a_{ij} = \max(i, j)$; в) $a_{ij} = |i - j|$.

13. Вычислите определители:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x_2 & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

14. Пусть a_{ij} — элемент определителя D порядка n и A'_{ij} — алгебраическое дополнение соответствующего элемента A_{ij} определителя D', взаимного с D. Докажите, что $A'_{ij} = D^{n-2}a_{ij}$.

15. Зная миноры всех элементов определителя D, отличного от нуля, найдите его элементы. Сколько решений имеет задача?

16. Покажите, что если

$$D(x)=\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix},$$

то произведение $D(x)\cdot D(-x)$ можно представить в виде

$$\begin{vmatrix} A_{11}-x^2 & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}-x^2 & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}-x^2 \end{vmatrix},$$

где все A_{ij} не зависят от x. Найдите выражение A_{ij} через a_{kl}.

17. Дана квадратная матрица порядка n. Оцените ее ранг, если:

1) она содержит нулевую подматрицу порядка $n-1$;

2) она содержит нулевую подматрицу порядка s;

3) она содержит подматрицу порядка $n-1$, имеющую ранг 1.

18. Пусть матрица A состоит из r линейно независимых столбцов, B — из r линейно независимых строк. Чему равен ранг AB?

19. Матрицы A и B имеют размеры соответственно $m\times r$ и $r\times n$, причем $\operatorname{rg} AB=r$. Найдите ранги матриц A и B.

20. Пусть матрицы A и B имеют размеры соответственно $m\times n$ и $n\times p$, и пусть $AB=O$. Докажите, что $\operatorname{rg} A+\operatorname{rg} B\le n$.

21. Докажите, что:

$$1)\ \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=\operatorname{rg} A+\operatorname{rg} B;$$

$$2)\ \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\ge\operatorname{rg} A+\operatorname{rg} B.$$

(Здесь $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ — блочные матрицы.)

22. Найдите условие, которому должна удовлетворять матрица с целыми элементами для того, чтобы все элементы обратной матрицы были целыми.

23. Пусть A — вещественная матрица. Докажите, что если все главные (диагональные) миноры k-го порядка матрицы A^TA равны нулю, то ранги матриц A^TA и A меньше k.

24. Докажите, что матрица, взаимная к произведению двух матриц, равна произведению взаимных матриц в том же порядке.

25. Докажите, что матричное уравнение $AX = B$ разрешимо тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен рангу матрицы $(A\,B)$, получаемой из A приписыванием к ней справа матрицы B.

26. Пусть A — квадратная матрица. Покажите, что матричное уравнение $AX = O$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\det A = 0$.

27. Докажите, что вычисление ранга симметрической матрицы сводится к вычислению одних только главных миноров, т.е. миноров, стоящих в строках и столбцах с соответственно равными номерами. Именно, докажите, что:

1) если в симметрической матрице A порядка n имеется главный минор M_r порядка r, отличный от нуля, для которого все окаймляющие его главные миноры ($r+1$)-го и ($r+2$)-го порядков равны нулю, то ранг матрицы A равен r (если все главные миноры равны нулю, то можно считать главный минор нулевого порядка M_0 равным 1, и теорема останется верной; при $r = n-1$ миноров порядка $r+2$ не существует, но утверждение теоремы верно, ибо ранг A равен $n-1$);

2) ранг симметрической матрицы равен наивысшему порядку отличных от нуля главных миноров этой матрицы.

28. Докажите, что ранг кососимметрической матрицы определяется ее главными минорами. Именно:

1) если существует главный минор порядка r, отличный от нуля, для которого все окаймляющие его главные миноры порядка $r+2$ равны 0, то ранг матрицы равен r;

2) ранг кососимметрической матрицы равен наивысшему порядку отличных от нуля главных миноров этой матрицы.

29. Докажите, что ранг кососимметрической матрицы — число четное.

30. При каких условиях система линейных уравнений относительно неизвестных x, y, z, t с вещественными коэффициентами

$$\begin{cases} \lambda x + ay + bz + ct = 0, \\ -ax + \lambda y + hz - gt = 0, \\ -bx - hy + \lambda z + ft = 0, \\ -cx + gy - fz + \lambda t = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение?

31. Пусть добавление к данной однородной системе линейных уравнений еще некоторого числа линейных однородных уравнений не меняет множества ее решений. Докажите, что добавленные уравнения являются линейными комбинациями уравнений данной системы. Докажите то же утверждение для совместной системы линейных неоднородных уравнений.

32. Сформулируйте в терминах рангов и докажите условие на декартовы координаты $(a_1; b_1)$, $(a_2; b_2)$, $(a_3; b_3)$ трех точек плоскости, необходимое и достаточное для того, чтобы эти точки не лежали на одной прямой. Решите ту же задачу для четырех точек плоскости.

33. Три точки заданы своими декартовыми координатами $(a_i; b_i; c_i)$, $i = 1, 2, 3$. Сформулируйте в терминах рангов и докажите условие, необходимое и достаточное для того, чтобы эти точки не лежали на одной прямой. Решите ту же задачу для $m \geq 4$ точек.

34. Четыре плоскости заданы в общей декартовой системе координат уравнениями

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Известно, что пары, соответствующие $i = 1, 2$ и $i = 3, 4$, определяют прямые. Сформулируйте в терминах рангов и докажите условия на коэффициенты уравнений, необходимые и достаточные для того, чтобы эти прямые:

1) пересекались;
2) были параллельными, но не совпадали;
3) совпадали;
4) скрещивались.

Используя эти условия, определите взаимное расположение прямых:

1) $\begin{cases} 3x + 2y + 5z - 1 = 0, \\ -x + 2y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 4x - 6y + 7z + 2 = 0, \\ 5x + 3y - 8z - 3 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 3y + 3z - 2 = 0, \\ x - 9y - 6z - 5 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 14y - 9z - 9 = 0, \\ 4x + 2y + z - 7 = 0. \end{cases}$