Лекция 3

3.1. Спин гравитона

Ранее мы обсуждали с точки зрения воображаемых венерианских ученых возможные интерпретации гравитации на языке известных полей. Мы предполагаем, что эти ученые знают общие свойства различных вариантов теории поля; они пытаются отыскать поля, обладающие характеристиками гравитации. Для того, чтобы сделать различие между разными возможностями, нам необходимо вспомнить следующие свойства гравитации; что большие массы притягивают с силой, пропорциональной инерции и обратно пропорциональной квадрату расстояния; также, что масса и инерция характеризуют значение энергии, так что энергия связи атомов и ядер имеет гравитационное поведение, аналогичное энергии покоя.

Мы можем представить себе, что одна группа теоретиков, специалистов по теории поля, пыталась интерпретировать гравитацию в терминах известных частиц, как мы это делали на предыдущей лекции, и эта попытка провалилась. Другая группа теоретиков, специалистов по теории поля, начала выводить некоторые свойства нового поля, которое вело бы себя как гравитация.

Во-первых, обнаруживается, что гравитация обладает дальнодействием, что автоматически означает, что энергия взаимодействия зависит от расстояния как $1/r$. Не существует другой подобной возможности в теории поля. Это поле переносится посредством обмена частицей, которую ниже будем называть гравитоном. Она должна иметь массу $m = 0$, так что сила, пропорциональная $1/r^2$, следует из из данного взаимодействия. Следующая догадка, которую мы должны сделать перед тем, как мы сможем начать работать в теории поля, состоит в том, что необходимо определить спин гравитона. Если спин равен 1/2 или полуцелый, то мы столкнемся с трудностями, которые обсуждались в последней лекции (разделе 2.3), и где не было обнаружено интерференции между амплитудами одиночного обмена и не было обмена взаимодействием. Таким образом, спин гравитона должен быть целым, т.е. некоторое число из последовательности 0, 1, 2, 3, 4, ... Любое из этих значений спина давало бы взаимодействие, пропорциональное $1/r$, так как радиальная зависимость определяется исключительно массой. Для того, чтобы выбрать между различными возможными значениями спина, мы должны посмотреть на более тонкое различия между эффектами, обусловленными гравитонами с различными значениями спина. Мы можем себе представить, что на-

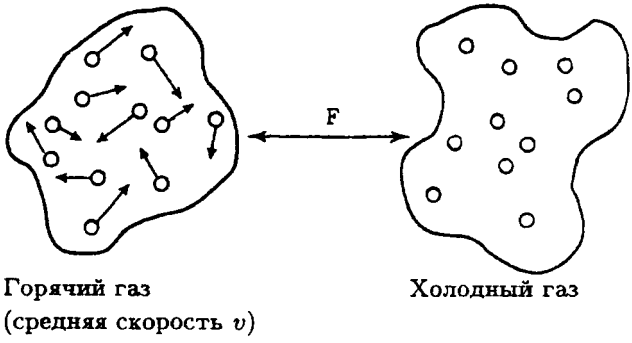

Рис. 3.1.

ша группа теоретиков, специалистов по теории поля, разделила между собой эту работу так, что одни вывели возможные заключения из гипотезы, что спин равен нулю, другие анализировали возможность того, что спин равен 1, другие, что спин равен 2, 3 или даже 4. Затраты труда, связанные с обсуждением деталей теории для более высоких значений спина, значительно больше, чем для более низких значений спина, так что мы будем обсуждать эти значения в порядке возрастания.

Теория, в которой спин частицы равен 1, в большой степени то же самое, что и электродинамика. Нет ничего такого, что запрещало бы существование двух полей со спином 1, но гравитация не может быть одним из этих полей, потому что одно из следствий спина 1 заключается в том, что одинаковые заряды отталкиваются, а противоположные притягиваются. Это фактически свойство всех теорий с нечетным спином; и наоборот, обнаружено, что теории с четным спином описывают силы притяжения, так что нам надо рассматривать только значения спинов 0 или 2 и возможно 4, если теория со спином 2 окажется неудовлетворительной; нет нужды работать с более сложными вариантами теории до той поры, пока не обнаружено, что более простые теории оказываются неадекватными.

Отклонение теорий гравитации со спином гравитона, равным 0, делается на основании гравитационного поведения энергии связи. Мы не намереваемся обсуждать здесь все детали до конца; мы приведем аргументы по аналогии, а затем приступим напрямую к построению теории со спином гравитона, равным 2. Зададим следующий вопрос: каково притяжение между движущимися объектами; больше оно или меньше, чем для статических объектов? Мы можем, например, вычислить взаимное притяжение двух масс газа; экспериментальное исследование гравитации приводит к выводу, что эта сила больше в том случае, если газ горячее (рис. 3.1).

Мы знаем, как это происходит в электродинамике. Электрические силы не меняются при случайном движении частиц. Теперь энергия взаимодействия пропорциональна ожидаемому значению оператора γ_t, который равен $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Так как потенциал, следующий из этого оператора, не является зависимым от скорости, то коэффициент пропорциональности должен быть $\sqrt{1-v^2/c^2}$. Это означает, что энергия взаимодействия, следующая из оператора 1, соответствующего полю со спином 0, была бы пропорциональна $\sqrt{1-v^2/c^2}$. Другими словами, теория со спином гравитона, равным 0, предсказывала бы, что взаимодействие между массами горячего газа было бы *меньше*, чем для холодного газа. Аналогичным способом может быть показано, что теория со спином гравитона, равным 2, приводит к энергии взаимодействия, которая имеет $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ в знаменателе, что согласуется с экспериментальными результатами о влиянии на гравитацию энергии связи. Таким образом, теория со спином гравитона 0 должна быть отвергнута, и нам необходимо рассматривать спин гравитона 2 для того, чтобы иметь теорию, в которой взаимодействие будет пропорционально величине энергии.

3.2. Амплитуды и поляризации в электродинамике, типичной полевой теории

Сейчас наша программа состоит в том, чтобы построить теорию со спином гравитона 2 по аналогии с другими теориями поля, которые у нас есть. В этом месте мы могли бы перейти на взгляд Эйнштейна на теорию гравитации, так как он получил правильную теорию, но будет более поучительно и проще для нас изучить свойства теории, если мы поддерживаем фантазию венерианских ученых для того, чтобы предположить свойства правильной теории. Поэтому, предполагая, что многие ученые *сегодня* могут придти к правильной теории гравитации, мы отнюдь не умаляем достижение Эйнштейна. В настоящее время у нас есть ретроспективный, хорошо развитый формализм, которого не было пятьдесят лет назад, и у нас есть указание Эйнштейна на правильное направление теории. Очень трудно представить себе, чтобы мы делали, если бы мы не знали того, что мы знаем, когда мы знаем то, что знаем, но давайте продвинемся дальше и сделаем предположения о правильной теории по аналогии с электродинамикой.

В теориях со скалярным, векторным и тензорным полями (другой способ обозначения спина 0, 1, 2) поля описываются скалярной, векторной или тензорной потенциальными функциями

Спин 0	X	Скалярный потенциал
Спин 1	A_μ	Векторный потенциал
Спин 2	$h_{\mu\nu}$	Симметричный тензорный потенциал

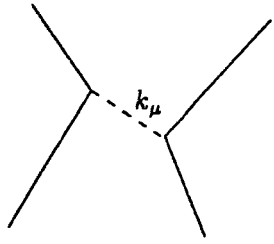

Рис. 3.2.

Другая теория могла бы следовать из предположения, что тензор – антисимметричный; это не привело бы к чему-то, напоминающему гравитацию, скорее к теории, напоминающей электромагнетизм; шесть независимых компонент антисимметричного тензора могли появиться как два пространственных вектора.

Источник электромагнетизма – векторный ток j_μ, который связывается с векторным потенциалом уравнением

$$A_\mu = -\frac{1}{k^2} j_\mu. \tag{3.2.1}$$

Сделаем преобразование Фурье и используем импульсное представление. Оператор Даламбера в импульсном представлении есть просто k^2. Вычисление амплитуд в электромагнетизме делается с помощью пропагаторов, связывающих токи, способом, изображенным диаграммами, такими, как на рис. 3.2. Вычислим амплитуды для таких процессов как функцию релятивистских инвариантов, и ограничим наш ответ, как предписывается законами сохранения импульса и энергии. Суть электромагнетизма состоит в детальном описании взаимодействия между током и полем, т.е. $j^\mu A_\mu$; на языке источников это становится взаимодействие между двумя токами

$$-j'_\mu \frac{1}{k^2} j^\mu. \tag{3.2.2}$$

Координатные оси могут быть выбраны таким образом, что вектор k_μ может быть выражен как

$$k^\mu = (\omega,\ \kappa,\ 0,\ 0). \tag{3.2.3}$$

Заметим, что мы используем упорядочение индекса 4, 3, 2, 1 так, что

$$x^\mu = (t,\ z,\ y,\ x), \quad A_\mu = (A_4,\ A_3,\ A_2,\ A_1). \tag{3.2.4}$$

Тогда ток-ток взаимодействие, когда незаряженные частицы имеют 4-импульс k^μ, задается соотношением

$$-j'_\mu \left(\frac{1}{k^2}\right) j_\mu = \frac{-1}{\omega^2 - \kappa^2}(j'_4 j_4 - j'_3 j_3 - j'_2 j_2 - j'_1 j_1). \tag{3.2.5}$$

Закон сохранения заряда, который утверждает, что четыре-дивергенция тока равна нулю, в пространстве импульсов становится ограничением

$$k_\mu j^\mu = 0. \tag{3.2.6}$$

В этой специальной системе координат, которую мы выбрали, это ограничение связывает третий и четвертый компонент этих токов соотношениями

$$\omega j^4 - \kappa j^3 = 0, \quad \text{или} \quad j^3 = \frac{\omega}{\kappa} j^4. \tag{3.2.7}$$

Если мы подставляем выражение для j_3 в выражение амплитуды (3.2.5), мы получаем, что

$$-j'_\mu \left(\frac{1}{k^2}\right) j^\mu = \frac{j'_4 j_4}{\kappa^2} + \frac{1}{\omega^2 - \kappa^2}(j'_1 j_1 + j'_2 j_2). \tag{3.2.8}$$

Теперь мы можем дать интерпретацию двум членам этого уравнения. Четвертый компонент тока есть просто плотность заряда; в этой ситуации, когда у нас есть стационарные заряды, это единственный ненулевой компонент. Первый член не зависит от частоты, и когда мы делаем обратное преобразование Фурье для того, чтобы преобразовать выражение в пространство взаимодействия, мы находим, что полученное соотношение представляет мгновенно действующий кулоновский потенциал

$$(F.T.)^{-1}\left[\frac{j'_4 j_4}{\kappa^2}\right] = \frac{e^2}{4\pi r}\delta(t - t'). \tag{3.2.9}$$

Это выражение всегда представляет собой главный член в пределе малых скоростей. Этот член кажется мгновенным, но это только потому, что разделение на два члена, которое мы сделали, очевидно, не является ковариантным. Общее взаимодействие на самом деле ковариантная величина; второй член представляет поправки к мгновенному кулоновскому взаимодействию.

Во взаимодействие между двумя токами всегда вовлечены виртуальные фотоны. Мы можем узнать кое-что о свойствах реальных фотонов из анализа полюсов амплитуды взаимодействия, которая имеет место при $\omega = \pm\kappa$. Конечно, любой фотон, который участвует в физическом эффекте, может рассматриваться как виртуальный фотон, так как он не наблюдается до тех пор, пока не произойдет взаимодействие, так что наблюдаемые фотоны никогда не характеризуются соотношением $\omega = \pm\kappa$. Тем не менее, нет трудностей в приближении к этому пределу; физически мы знаем фотоны, которые приходят от Луны или Солнца, для которых относительная разница между величинами ω и κ – очень, очень мала. Если мы полагаем, что мы

наблюдаем фотоны от удаленных галактик, которые находятся от наблюдателя на расстоянии в миллионы световых лет, мы понимаем, что это должно придать тот физический смысл, чтобы думать, что мы близки к полюсу так, что для этих фотонов не может быть никакого физического эффекта *не* являющимся похожим на полюсный член. Вычет полюсного члена при $\omega = \kappa$ есть сумма двух членов, каждый из которых есть произведение двух множителей. Кажется, что существует один тип фотонов, которые взаимодействуют с токами j_1 и j_1', и другой тип фотонов, которые взаимодействуют с токами j_2 и j_2'. Пользуясь обычным языком, мы описываем данную ситуацию, говоря, что имеются две независимые поляризации для фотонов.

Круговая поляризация есть ничто иное, как линейные комбинации плоскополяризованных фотонов, соответствующих разделению суммы произведений $(j_1'j_1 + j_2'j_2)$ в различном базисе, таким образом мы имеем

$$(j_1'j_1 + j_2'j_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(j_1 + ij_2)\frac{1}{\sqrt{2}}(j_1' + ij_2')^* + \frac{1}{\sqrt{2}}(j_1 - ij_2)\frac{1}{\sqrt{2}}(j_1' - ij_2')^*. \quad (3.2.10)$$

По-прежнему, мы видим здесь, что имеется два типа фотонов. Преимущество такого разделения становится очевидным, когда мы рассматриваем вращение координатной системы вокруг направления движения фотона 3. Фотоны с круговой поляризацией вращаются вокруг себя, потому что они меняют только фазу при повороте системы координат на угол θ; эти фазы равны $\exp(i\theta)$ и $\exp(-i\theta)$.

Квантово-механические правила, описывающие поведение систем под действием вращения, говорят нам, что системы, имеющие такое свойство, находятся в состоянии с определенным значением углового момента; фотоны, которые меняют фазу как $\exp(i\theta)$, имеют проекцию углового момента 1, а фотоны с изменением фазы $\exp(-i\theta)$ – проекцию, которая равна -1.

Мы могли бы ожидать, что если фотоны имеют спин, равный 1, то мог бы существовать третий тип фотонов, имеющих проекцию спина, равную 0. Тем не менее, может быть показано, что для релятивистской теории частиц с нулевой массой покоя разрешены только два состояния проекции, имеющие максимальное и минимальное значения проекции вдоль направления распространения. Этот общий результат, справедливый для частиц с любым спином, был доказан Вигнером. Мы не будем приводить здесь это доказательство, но просто для тех случаев, которые нас интересуют, фотона сейчас и гравитона ниже, покажем существование этих двух состояний точным

разделением этого взаимодействия.

Можно было бы возразить, что мы показали существование двух состояний для *токов*, которые являются операторами источника в большей степени, чем для самих фотонов. Но одно влечет за собой другое, так как амплитуда процесса испускания фотон с круговой поляризацией -1 задается оператором тока $(j_1 + ij_2)/\sqrt{2}$ и т.д. Если мы вращаем систему координат, то амплитуда для процесса излучения не должна бы меняться, так что, мы приходим к требованию соответствующего изменения фазы для самих фотонов. Действительная поляризация фотонов, возможно, наилучшим образом определяется проекциями векторного потенциала в выделенных направлениях, таких как e_μ (e_μ – единичный вектор). Взаимодействие такого фотона с током j^μ, т.е. амплитуда поглощения или испускания такого фотона задается соотношением

$$-e_\mu j^\mu = (\text{проекция } j^\mu \text{ вдоль } e_\mu) \tag{3.2.11}$$

3.3. Амплитуды для обмена гравитона

Выпишем амплитуды для обмена гравитоном по простой аналогии с электродинамикой. Мы должны будем обратить особое внимание на мгновенные нерелятивистские члены, так как только эти члены выявляются в существующих экспериментальных наблюдениях гравитации. Полная теория дает нам как члены, описывающие мгновенное взаимодействие (аналогичное кулоновскому взаимодействию), так и поправки, которые появляются как запаздывающие волны; мы должны будем разделить эти запаздывающие эффекты для вычислений наблюдаемых эффектов.

Мы предполагаем, что оператор Даламбера в импульсном пространстве есть k^2; по простой аналогии с уравнением (3.2.1) мы ожидаем, что тензор поля устанавливает соотношение с тензором источника следующим образом

$$h_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2} T_{\mu\nu}. \tag{3.3.1}$$

Какое это может быть взаимодействие? Так как электродинамика описывает токи, предположим, что тензоры источника появляются в энергии взаимодействия следующим образом

$$T'_{\mu\nu}\left(\frac{1}{k^2}\right)T^{\mu\nu}. \tag{3.3.2}$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы описать частные характеристики тензора $\mathbf{T}$ так, чтобы воспроизводились характеристики гравитации. *A priori* возможно, что тензор $\mathbf{T}$ включает в себя градиенты, который и есть вектор $\mathbf{k}$. Если в тензор включены только

градиенты, то в результирующей теории нет монополей; простейшими объектами могут быть диполи. Мы хотим, чтобы тензор **T** был таким, как в нерелятивистском пределе, а плотность энергии появлялась по аналогии с плотностями заряда j_4. Как хорошо известно, мы имеем в электромагнетизме тензор давления, чья компонента T_{44} является в точности плотностью энергии электромагнитного поля. Следовательно, очень вероятно, что имеется некоторый общий тензор, чей компонент T_{44} является плотностью полной энергии; это будет задавать ньютоновский закон гравитации в пределе малых скоростей, энергия взаимодействия при этом

$$\frac{-T'_{44}T_{44}}{\kappa^2}. \tag{3.3.3}$$

Затем, для того, чтобы иметь правильную релятивистскую теорию, необходимо следовать тому, чтобы амплитуда включала в себя полный тензор **T**, как мы предполагали в соотношении (3.3.2).

Имеется свойство этого тензора, которое мы не еще упомянули. След симметричного тензора – инвариантная величина, не обязательно равная нулю. Таким образом, при вычислениях, основываясь на симметричном тензоре с ненулевым следом, мы могли бы взять теорию, которая есть смесь теорий со спином равным 0 и со спином равным 2. Если мы выписываем теорию, использующую этот тензор, мы найдем, когда мы прийдем к разделению взаимодействия на его поляризации, что очевидно имеется три поляризации вместо двух, которые допустимы для безмассовой частицы со спином 2. Для того, чтобы быть более точными, мы можем получить кроме взаимодействия (3.2.2) другую возможную инвариантную форму, пропорциональную $T^\mu{}_\mu(1/k^2)T^\nu{}_\nu$. Мы попытаемся установить соотношения между этими двумя инвариантами таким образом, чтобы не было обмена реальными гравитонами с угловым моментом, равным нулю.

Выпишем в точности все различные члены следующим образом

$$T'_{\mu\nu}\frac{1}{k^2}T^{\mu\nu} = \frac{1}{\omega^2-\kappa^2}(T'_{44}T_{44} - 2T'_{43}T_{43} - 2T'_{42}T_{42} - 2T'_{41}T_{41}$$
$$+ 2T'_{23}T_{23} + 2T'_{31}T_{31} + 2T'_{21}T_{21} + T'_{33}T_{33} + T'_{22}T_{22} + T'_{11}T_{11}). \tag{3.3.4}$$

В электродинамике мы получили упрощение, используя закон сохранения заряда. Здесь мы получаем упрощение, используя закон сохранения энергии, который может быть выражен в импульсном пространстве следующим образом

$$k^\mu T_{\mu\nu} = 0. \tag{3.3.5}$$

В нашей обычной системе координат, где компоненты k^1 и k^2 равны нулю, получаем связь компонентов нашего тензора с индексами 3 и 4

$$\omega T_{4\nu} = -\kappa T_{3\nu}. \tag{3.3.6}$$

Используя это соотношение для исключения компонентов с индексом 3, мы находим, что амплитуда разделяется на часть, описывающую мгновенное взаимодействие, имеющую характерный числитель κ^2, и запаздывающую часть со знаменателем $(\omega^2 - \kappa^2)$. Для "мгновенного" члена мы получаем

$$-\frac{1}{\kappa^2}\left[T'_{44}T_{44}\left(1-\frac{\omega^2}{\kappa^2}\right) - 2T'_{41}T_{41} - 2T'_{42}T_{42}\right], \tag{3.3.7}$$

и для "запаздывающего" члена

$$\frac{1}{\omega^2-\kappa^2}\left(T'_{11}T_{11} + T'_{22}T_{22} + 2T'_{21}T_{21}\right). \tag{3.3.8}$$

Трансверсальные компоненты тензора **T** предположительно независимы, так что они представляют сумму трех независимых произведений или трех поляризаций. Мы видим, что такая теория содержит смесь спина 0 и спина 2. Для того, чтобы исключить часть, соответствующую спину нуль, мы должны добавить к нашей амплитуде член вида

$$\alpha T'^{\nu}{}_{\nu}\left(\frac{1}{k^2}\right)T^{\mu}{}_{\mu}. \tag{3.3.9}$$

В "запаздывающем" члене добавляются компоненты тензора следующим образом

$$\alpha\frac{1}{\omega^2-\kappa^2}(T'_{11}+T'_{22})(T_{11}+T_{22}).$$

Мы можем выбрать параметр α так, что "запаздывающий" член содержит только сумму двух независимых произведений. Соответствующее значение параметра α равно $-1/2$ для того, чтобы сделать запаздывающий член равным

$$\frac{1}{\omega^2-\kappa^2}\left[\frac{1}{2}(T'_{11}-T'_{22})(T_{11}-T_{22}) + 2T'_{12}T_{12}\right]. \tag{3.3.10}$$

Имеется два направления поляризации, которые порождаются этими комбинациями элементов тензора

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{11}-T_{22}) \quad \text{и} \quad \sqrt{2}(T_{12}). \tag{3.3.11}$$

Различная нормализация есть результат симметрии нашего тензора; мы можем восстановить симметрию, записывая

$$\sqrt{2}T_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{12}+T_{21}). \tag{3.3.11a}$$

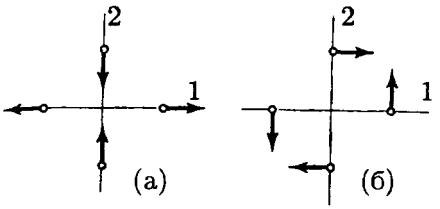

Рис. 3.3.

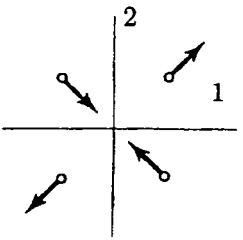

Рис. 3.4.

Следовательно, возможное решение типа плоской волны, представляющее наш гравитон, имеет вид

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} \exp\left(ik_\sigma x^\sigma\right), \tag{3.3.12}$$

где тензор поляризации $e_{\mu\nu}$ имеет следующие ненулевые компоненты

$$e_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e_{22} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e_{12} = e_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3.3.13}$$

Наше взаимодействие в общем виде

$$T'_{\mu\nu}\frac{1}{k^2}T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T'^{\mu}{}_{\mu}\frac{1}{k^2}T^{\nu}_{\nu}$$

может быть записано как $T'^{\sigma\tau}P_{\sigma\tau,\mu\nu}T^{\mu\nu}$, где $P_{\sigma\tau,\mu\nu}$ – пропагатор для гравитона описывается следующим соотношением:

$$P_{\sigma\tau,\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\tau} + \eta_{\mu\tau}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\tau}\right)\frac{1}{k^2}.$$

Для простоты мы обычно будем предпочитать записывать этот пропагатор как простой множитель $1/k^2$ и представлять взаимодействие виртуальными гравитонами, испущенными источником с амплитудой

$$h_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^{\sigma}{}_{\sigma}\right)$$

и со связью $h_{\mu\nu}T'^{\mu\nu}$ для поглощения.

Амплитуда для излучения реального гравитона поляризации $e_{\sigma\tau}$, если $e^{\sigma}{}_{\sigma} = 0$, как в соотношении (3.3.13), задается внутренним (скалярным) произведением $e_{\sigma\tau}T^{\sigma\tau}$.

3.4. Физическая интерпретация в терминах амплитуд

Поляризация гравитона есть тензорная величина. Мы можем наглядно представить это понятие с помощью картинок, подобных тем, которые мы использовали в описании давлений; мы рисуем стрелки, показывающие направление, которое ассоциировано с нормалью к поверхности, к осям координат. В этой плоскости, перпендикулярной

направлению распространения, мы имеем два давления, изображенные на рис. 3.3. Имеется только две возможности для квадрупольного давления; давления, представляемые стрелками, направленными к началу координат (или от начала координат), представляют собой тип давления в жидкости, которое соответствует спину, равному нулю. "Давления" (в действительности вращения), представляемые всеми стрелками, поворачивающимися в направлении по часовой стрелке (или против часовой стрелки), соответствует спину 1.

Давление, представленное на рис. 3.3(а), может относится к осям, которые повернуты на угол 45° от исходных осей координат; в этом случае картинка на рис. 3.4 есть ничто иное, как то же самое давление, изображенное на рис. 3.3(а), повернутое на угол 45°. Отсюда мы находим, что эти поляризации поворачиваются одна в другую при повороте осей на угол 45°. Если мы поворачиваем на угол 90°, то каждая поляризация переходит в себя; стрелки меняют свое направление, но мы должны думать об осциллирующей зависимости от времени, которая связана с этими поляризациями. Двигаясь этим путем, мы видим, что полное вращение на угол 360° соответствует двум полным циклам фазы – спин равен двум. Существуют две ортогональных линейных комбинации этих двух поляризаций, чьи изменения вращательной фазы ведут себя как $\exp(2i\theta)$ и $\exp(-2i\theta)$. Это просто различное разделение "запаздывающего" члена; методом проб и ошибок мы можем просто представить эти две части

$$\frac{1}{4}(T'_{11} - T'_{22} + i2T'_{12})(T_{11} - T_{22} - i2T_{12}) + \frac{1}{4}(T'_{11} - T'_{22} - i2T'_{12})(T_{11} - T_{22} + i2T_{12}). \quad (3.4.1)$$

Эти части характеризуются спином 2, проекция ± 2 тензоров очевидна, когда мы сравниваем форму этих произведений с произведением гармонических многочленов; мы знаем, что $(x \pm iy)(x \pm iy)$ очевидно характеризуются спином 2 и проекцией ± 2; эти произведения равны $(xx - yy \pm 2ixy)$, которые имеют ту же структуру, что и члены в соотношении (3.4.1). Таким образом, мы приходим к выводу, что при $\alpha = -1/2$, наши гравитоны имеют только две возможных поляризации. Эта возможно правильная теория, эквивалентная теории поля спина 2, которую ранее рассматривали теоретики Паули и Фирц и выразили на языке полевых лагранжианов [FiPa 39].

Мы подходим к теории со спином 2, исходя из аналогий с теорией со спином 1; таким образом мы без объяснений предполагаем существование гравитонных плоских волн; так как плоские волны фотона представляются полюсами пропагатора, и пропагатор гравитона

также имеет полюсы $\omega = \pm\kappa$. Но соответствующие наблюдательные свидетельства отсутствуют; мы не наблюдали ни гравитонов; ни даже классических гравитационных волн.

Имеются некоторые проблемы, которыми мы пренебрегли полностью в настоящее время, но к которым мы вернемся позднее. Источники электромагнетизма сохраняются, и энергия также сохраняется, которая есть источник гравитации. Но это сохранение совершенно другого характера, так как фотон – незаряжен, следовательно, он не является источником самого себя, тогда как гравитон содержит энергию, равную $\hbar\omega$, и следовательно, он сам является источником гравитонов. Мы говорим об этом, как о нелинейности гравитационного поля.

В электромагнетизме мы можем вывести полевые уравнения (уравнения Максвелла), которые несогласованы, если заряд не сохраняется. До сих пор мы избегали обсуждения полевого уравнения для гравитации, поскольку мы беспокоились только об амплитудах, но не о самих полях. Также нам необходимо уже обсудить, является ли теория, которую мы можем написать, зависимой от калибровки, и можем ли мы написать вообще полевое уравнение, соответствующее максвелловским уравнениям $\partial F^{\mu\nu}/\partial x^\nu = j^\mu$.

Имеются некоторые физические свойства нашей теории, которые могут быть обсуждены без полевых уравнений, просто из рассмотрения формы взаимодействия. Запишем полное выражение, соответствующее $\alpha = -1/2$:

$$
\begin{aligned}
2\left[T'_{\mu\nu}\left(\frac{1}{k^2}\right)T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}T'^{\nu}{}_{\nu}\left(\frac{1}{k^2}\right)T^{\mu}{}_{\mu}\right] \\
= -\frac{1}{\kappa^2}\left[T'_{44}T_{44}\left(1-\frac{\omega^2}{\kappa^2}\right) + T_{44}\left(T'_{11}+T'_{22}\right)\right. \\
\left. +T'_{44}(T_{11}+T_{22}) - 4T'_{41}T_{41} - 4T'_{42}T_{42}\right] \\
- \frac{1}{\kappa^2-\omega^2}\left[(T'_{11}-T'_{22})(T_{11}-T_{22}) + 4T'_{12}T_{12}\right]. \qquad (3.4.2)
\end{aligned}
$$

(Если потребуется, то член $(\omega^2/\kappa^2)T'_{44}T_{44}$ может заменяться на $T'_{43}T_{43}$ или на $(T_{44}T'_{33} + T_{33}T'_{44})$). Мы уже обсудили запаздывающий член и его поляризации. Теперь проанализируем первый член. Тензор $\mathbf{T}$ – тензор давления; для медленных частиц пространственные компоненты порядка v/c, так что ньютоновский закон представляется только одним своим произведением $T'_{44}T_{44}$. Другие произведения представляют собой что-то подобное магнетизму. Заметим, что при таком разделении они появляются как члены, описывающие мгновенное взаимодействие. Запаздывающие эффекты, движущиеся волны появля-

ются только при четных степенях v/c.

Мы можем думать, что члены, описывающие мгновенное взаимодействие типа магнитного, могли бы давать наблюдаемые эффекты, например, могло бы быть небольшое изменение в гравитационном взаимодействии между двумя колесами, если мы вращаем их все быстрее и быстрее. Рассматриваемая теория действительно предсказывает подобные эффекты, но практически подобные силы не только были бы очень, очень малы, но они также были бы скрыты множеством других эффектов. Магнитные силы, такие как притяжение между двумя проводящими ток проволочками, достаточно просто наблюдать только потому, что эффекты кулоновского взаимодействия взаимно уничтожаются очень, очень точно при наличии равных величин положительного и отрицательного зарядов. Но все гравитационные силы притягивающие, так что нет надежды на подобное взаимное уничтожение этих сил. Для вращающихся колес трудность была бы в том, что упругое давление вещества вносило бы добавку в члены, описывающие энергию взаимодействия, колеса бы управлялись слегка по разному и т.д. В добавление к этому, мы можем думать, что обычное гравитационное взаимодействие довольно трудно измерить, и что эффекты типа магнитных могут быть меньше на некоторое отношение $(v/c)^2$ такое, как отношение магнитных сил к кулоновским. Силы между проволочками, проводящими ток, порядка грамма веса, в то время как кулоновские взаимодействия между частицами в проволочках (в случае, если бы они взаимно не уничтожались) порядка миллиардов миллионов тонн.

Возможно пронаблюдать эффекты, обусловленные таким членом типа магнитного, если мы рассмотрим гравитационное взаимодействие частиц, движущихся со скоростью света или с близкой к ней скоростью. Предположим, что $T'_{\mu\nu}$ обусловлен стационарным источником, таким как Солнце, так что остается только компонент T'_{44}, и мы рассмотрим гравитационное взаимодействие между Солнцем и быстрой частицей, которая движется со скоростью v, близкой к скорости света c, так что ее тензор давления имеет компоненты, такие как $T_{11} = (v^2/c^2)T_{44}$. Затем в соотношении (3.4.2) мы видим, что энергия взаимодействия больше, чем обусловленная только T_{44} на множитель $1 + v^2/c^2$ или на множитель 2 для фотона. Таким образом, так как фотон движется в сильном гравитационном поле, то он движется как частица, обладающая большей энергией, чем можно было бы предсказать, исходя из ньютоновской теории. Отклонение луча света звезды тогда, когда луч проходит вблизи поверхности Солнца, в два раза больше, чем величина, получаемая при анализе изменения

импульса в рамках ньютоновской теории гравитации. Земляне провели подобный эксперимент и обнаружили, что наблюдаемая величина угла отклонения больше, чем величина, получаемая в рамках ньютоновской теории, на множитель, который очень близок к 2. И хотя данный наблюдательный факт достаточно несовершенен и не во всем согласован, он предполагает действительный эффект в направлении, предсказываемом нашей теорией.[1]

В этом месте мы могли бы приступить к вычислению в деталях таких эффектов, как и рассмотренный выше, а также многих других задач, таких как комптоновское рассеяние гравитонов, эффектов, связанных с движением Меркурия вокруг Солнца, для того, чтобы найти порядки величин гравитационных эффектов и определить, какие эксперименты могли бы быть возможными. Тем не менее, возможно предпочтительнее приступить к описанию самого гравитационного поля на языке полевого лагранжиана и полевых уравнений, чем на языке амплитуд.

3.5. Лагранжиан для гравитационного поля

Теперь мы будем изучать нашу теорию на языке лагранжиана, исследуя сами поля, а не просто амплитуды. Сначала вновь рассмотрим ситуацию в электродинамике. Здесь действие есть

$$S_{\mathrm{E}} = -\int d\tau \left[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\right)\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu}\right) + j^\mu A_\mu\right]. \qquad (3.5.1)$$

Именно из такого лагранжиана мы в конце концов выводим полевые уравнения; мы хотим получить гравитационный аналог соотношения $A_\mu = -(1/k^2)j_\mu$.

Нетрудно сделать предположение о форме второго члена, описывающего взаимодействие. Мы предполагаем, что этот член равен $-\lambda h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$. Здесь аналогия для членов, в которые вовлечены производные, не так очевидна; просто имеется слишком много индексов, которые могут быть переставлены слишком большим числом способов. Мы будем должны написать общую форму для лагранжиана, как сумму по всем возможным способам записи полевых производных, подставляя произвольные коэффициенты перед каждым членом, т.е. записывая его следующим образом:

$$a\left(\frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\cdot\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right) + b\left(\frac{\partial h^{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right) + c\left(\frac{\partial h^{\mu}{}_{\mu}}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial h^{\sigma}{}_{\nu}}{\partial x_\sigma}\right) + \dots . \qquad (3.5.2)$$

[1] В 1970-х годах были проведены наблюдения по измерению отклонений гравитационным полем Солнца положений радиоисточников с помощью радиоинтерферометров с очень большой базой и предсказания ОТО были подтверждены с точностью до 1 – 3 % процентов [Заха 97*]. *(Прим. перев.)*

Наша теория не будет полна до тех пор, пока мы не придумаем некоторый критерий для определения значений коэффициентов a, b, c, d, e, ...

Возможно мы можем сделать предположение по некоторой аналогии с электромагнетизмом. Если мы вычисляем вариацию общего лагранжиана (3.5.1) по отношению к A, мы получаем дифференциальное уравнение, связывающее поля и ток

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}A_\mu - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}A_\nu = j_\mu. \tag{3.5.3}$$

Для экономии записи далее мы будем показывать такие дифференцирования (градиенты), просто указывая индексы координат после запятой; уравнение, которое приведено выше, имеет следующий вид:

$$A_{\mu,\nu}{}^{,\nu} - A_{\nu,\mu}{}^{,\nu} = j_\mu. \tag{3.5.4}$$

Закон сохранения заряда выражается вычислением дивергенции j_μ, равной нулю. Но мы можем заметить, что уравнения Максвелла для этого поля несогласованы, за исключением закона сохранения заряда, и что градиент от выражения в левой части соотношения (3.5.4) *тождественно* равен нулю. С использованием правильного лагранжиана электромагнитного поля, закон сохранения заряда может быть выведен как следствие полевых уравнений. Так как *левая* часть уравнения (3.5.4) удовлетворяет этому *тождеству*, его дивергенция также равна нулю:

$$A_{\mu,\nu}{}^{,\nu\mu} - A_{\nu,\mu}{}^{,\nu\mu} = 0. \tag{3.5.5}$$

Подобное условие используется для того, чтобы определить величину коэффициентов a, b, c, d, e, ... относительно друг друга. Мы будем выписывать общий лагранжиан, выводить дифференциальные полевые уравнения путем вариации лагранжиана и требовать, что, так как дивергенция тензора $\mathbf{T}$ обращается в нуль, полевые величины, которые равны этому тензору, должны иметь дивергенцию, которая равна нулю тождественно. Это условие будет влиять на однозначный выбор значений коэффициентов. Мы проведем ниже алгебраические вычисления подробно, устанавливая значения коэффициентов таким образом, что полевые уравнения согласованы, если только

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \tag{3.5.6}$$

3.6. Уравнения гравитационного поля

Вывод уравнений начнем с выписывания всех возможных произведений нашего полевого тензора $h_{\mu\nu}$. На каждом шагу имеют место значительные упрощения, если мы используем симметрию тензора

$h_{\mu\nu}$ при комбинации различных членов. Если два тензорных индекса отличны от индекса производной, мы имеем два различных произведения

1. $h_{\mu\nu,\sigma}h^{\mu\nu,\sigma}$ 2. $h_{\mu\nu,\sigma}h^{\mu\sigma,\nu}$

Если имеются два индекса, которые равны, мы можем иметь три возможных произведения

3. $h^{\mu\nu}{}_{,\nu}h^{\sigma}{}_{\mu,\sigma}$ 4. $h^{\mu\nu}{}_{,\nu}h^{\sigma}{}_{\sigma,\mu}$ 5. $h^{\nu}{}_{\nu,\mu}h_{\sigma}{}^{\sigma,\mu}$

Не все пять произведений необходимо рассматривать, произведение п. 2 может быть опущено, поскольку оно может быть преобразовано в произведение п. 3 интегрированием по частям. Таким образом, предполагаем, что лагранжиан имеет следующий вид

$$S = \int d\tau \left[a\, h^{\mu\nu,\sigma}h_{\mu\nu,\sigma} + b\, h^{\mu\nu}{}_{,\nu}h^{\sigma}{}_{\mu,\sigma} + c\, h^{\mu\nu}{}_{,\nu}h^{\sigma}{}_{\sigma,\mu} + d\, h^{\nu}{}_{\nu,\mu}h_{\sigma}{}^{\sigma,\mu} - \lambda T^{\mu\nu}h_{\mu\nu}\right]. \quad (3.6.1)$$

Теперь мы вариируем эту сумму четырех произведений по отношению к тензору $h_{\alpha\beta}$ для того, чтобы получить дифференциальное уравнение, связывающее полевые производные с тензором источника $T_{\alpha\beta}$. Таким образом, приходим к следующему результату (необходимо помнить, что $\delta h_{\alpha\beta}$ симметричен по индексам α, β, так что симметричная часть его коэффициентов должна быть равна нулю)

$$a\, 2\, h_{\alpha\beta,\sigma}{}^{,\sigma} + b\,(h_{\alpha\sigma,\beta}{}^{,\sigma} + h_{\beta\sigma,\alpha}{}^{,\sigma}) + c\,(h^{\sigma}{}_{\sigma,\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta}h^{\mu\nu}{}_{,\nu\mu}) + d\, 2\, \eta_{\alpha\beta}\, h^{\sigma}{}_{\sigma,\mu}{}^{\mu} = -\lambda T_{\alpha\beta}. \quad (3.6.2)$$

Мы берем производную каждого из этих членов по отношению к индексу β, тогда требование, что дивергенция левой части должна быть равна нулю, приводит к следующему уравнению

$$2\, a\, h^{\alpha\beta,\sigma}{}_{,\sigma\beta} + b\, h^{\alpha\sigma,\beta}{}_{,\sigma\beta} + b\, h^{\beta\sigma,\alpha}{}_{,\sigma\beta} + c\, h^{\sigma}{}_{\sigma}{}^{,\alpha\beta}{}_{\beta} + c\, h^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu}{}^{\alpha} + 2\, d\, h^{\sigma}{}_{\sigma,\mu}{}^{,\mu\alpha} = 0. \quad (3.6.3)$$

Теперь объединяем члены с одним и тем же множителем и берем значение соответствующего коэффициента равным нулю; получаем следующие соотношения, которые включают в себя перестановку и смену индексов:

$$\begin{aligned} h^{\alpha\beta,\sigma}{}_{,\sigma\beta}(2a + b) &= 0, \\ h^{\beta\sigma,\alpha}{}_{\beta\sigma}(b + c) &= 0, \\ h^{\sigma}{}_{\sigma,\beta}{}^{\alpha\beta}(c + 2d) &= 0. \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

Если мы выбираем масштаб для наших результатов такой, что $a = 1/2$, мы получаем

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -1, \quad c = 1, \quad d = -\frac{1}{2}. \quad (3.6.5)$$

Предположительно, теперь мы получили правильный лагранжиан для гравитационного поля. Как следствие из этого лагранжиана мы получим в конце концов полевое уравнение.

3.7. Определение символов

Манипуляции с тензорными величинами становятся все более скучными в той работе, которой мы занимаемся; и для того, чтобы не увязнуть в алгебре со многими индексами, могут быть разработаны некоторые упрощающие приемы. В настоящее время не очевидно, что определения, которые мы делаем, полезны; подтверждение этому проявится в их более позднем использовании.

Определим оператор "черта" для произвольного тензора второго ранга следующим образом:

$$\overline{X}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(X_{\mu\nu} + X_{\nu\mu}\right) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}X^{\sigma}{}_{\sigma}. \tag{3.7.1}$$

Для симметричного типа, такого как $\mathbf{h}$, это правило проще, потому что два члена в первой скобке равны

$$\overline{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\, h^{\sigma}{}_{\sigma}, \tag{3.7.2а}$$

$$\overline{\overline{h}}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}. \tag{3.7.2б}$$

Заметим, что оператор "черта" является своим собственным обратным оператором для симметричного тензора.

Определим также использование неиндексированного тензорного символа, чтобы представить его след

$$h = \mathrm{Tr}(\mathbf{h}) = h^{\sigma}{}_{\sigma},$$
$$\overline{h}^{\sigma}{}_{\sigma} = -h. \tag{3.7.3}$$

Используя такие обозначения, можно записать полевые уравнения (3.6.2) с учетом (3.6.5) в симметризованном варианте

$$h_{\mu\nu,\sigma}{}^{,\sigma} - 2\overline{h}_{\mu\sigma,\nu}{}^{,\sigma} = -\lambda\overline{T}_{\mu\nu}. \tag{3.7.4}$$

Для того, чтобы получить соотношение для $T_{\mu\nu}$, мы просто берем оператор "черта" от обеих частей последнего уравнения.

Следующим шагом мы попробуем найти что-либо аналогичное свойствам калибровочной инвариантности электродинамики для того, чтобы упростить решение уравнения (3.7.4). В электродинамике полевые уравнения имеют вид:

$$A^{\mu,\nu}{}_{,\nu} - A_{\nu}{}^{,\nu\mu} = j^{\mu}, \tag{3.7.5}$$

следствие которых состоит в возможности описания полей так же хорошо на языке нового четыре вектора A'_μ, получаемого из вектора A_μ добавлением градиента скалярной функции X

$$A'_\mu = A_\mu + X_{,\mu}. \tag{3.7.6}$$

Какое свойство было бы аналогичным свойством тензорного поля? Мы предполагаем, что следующее свойство может быть справедливым: (мы должны быть внимательны для того, чтобы сохранить наши тензоры симметричными) подстановка

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} \tag{3.7.7}$$

в левую часть уравнения (3.7.4) не меняет вид этого уравнения. Доказательство этого факта оставляем в качестве упражнения.

С использованием свойства калибровочной инвариантности, было бы проще получить уравнения для полей в определенной калибровке, что более подходяще, что-то типа лоренцевой калибровки в электродинамике. По аналогии с выбором

$$A^\nu{}_{,\nu} = 0, \tag{3.7.8}$$

мы сделаем следующий выбор (который будем называть условием Лоренца)

$$\overline{h}^{\mu\sigma}{}_{,\sigma} = 0. \tag{3.7.9}$$

Таким образом, получаем полевые уравнения, связывающие оператор "черта" от тензора **T** с полями

$$h^{\mu\nu,\sigma}{}_{,\sigma} = -k^2\, h^{\mu\nu} = -\lambda\, \overline{T}^{\mu\nu}, \tag{3.7.10}$$

или решая $h_{\mu\nu} = (\lambda/k^2)\overline{T}_{\mu\nu}$. Немедленно получаем, что амплитуда взаимодействия такого тензора **h** с другим источником $T'_{\mu\nu}$ от $\lambda h_{\mu\nu} T'^{\mu\nu}$ в лагранжиане, имеет следующее выражение

$$\lambda^2 T'_{\mu\nu} \left[\frac{1}{k^2}\right] \overline{T}^{\mu\nu}.$$

Итак, мы получили в точности то, что мы получили прежде при обсуждении амплитуд непосредственно.