Лекция 8

8.1. Преобразования компонент тензора в неортогональных координатах

В большей части предыдущих рассуждений можно было использовать упрощенное обозначение для суммирования тензорных компонент, поскольку мы всегда имели дело с координатными системами, которые были ортогональны. В частности, мы всегда использовали правило суммирования по повторяющимся индексам

$$A_\mu B^\mu = A_4 B^4 - A_3 B^3 - A_2 B^2 - A_1 B^1. \tag{8.1.1}$$

В ортогональных координатных системах эти суммы являются инвариантными скалярными величинами; хорошо знакомый частный случай представляет собой суммирование, которое определяет собственное время в специальной теории относительности

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2. \tag{8.1.2}$$

Для более общих координатных систем, рассматриваемых нами теперь, которые ускоряются, скручиваются и сжимаются, собственное время определяется через произведения координатных смещений и метрический тензор (7.4.7); мы видим, что конструкция скалярных инвариантов следует правилу, которое более сложно, чем правило, задаваемое соотношением (8.1.1). Координатные смещения являются прототипами того, что мы будем называть контравариантными компонентами вектора. Для удобства обозначений будем записывать компоненты с помощью верхних индексов, например dx^μ. Что является важным, так это закон преобразования этих контравариантных векторных компонентов при изменении системы координат. Для координатных интервалов этот закон описывается следующим соотношением:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha. \tag{8.1.3}$$

Определим векторную функцию, которая представляет собой набор четырех переменных, которые имеют характер координатных смещений и преобразуются таким же самым образом, как мы меняем координаты

$$A^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha(x). \tag{8.1.4}$$

Мы называем величины A^μ контравариантными компонентами вектора. Мы можем очень легко распространить эти определения на тензоры более высокого ранга; например, тензор есть функция, которая преобразуется таким же самым образом, как и скалярное произведение двух векторов, т.е.

$$T^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}T^{\alpha\beta}. \tag{8.1.5}$$

Когда мы сравниваем закон преобразования для метрического тензора с определением (8.1.5), мы видим, что $g_{\mu\nu}$ не есть величина такого же рода, так как производные появляются в "перевернутом виде". Тем не менее, мы определили матрицу, которая является обратной к матрице $g_{\mu\nu}$,

$$g^{\nu\alpha}g_{\alpha\beta} = \delta^\nu{}_\beta. \tag{8.1.6}$$

Нетрудно показать, что эта обратная матрица на самом деле составляет контравариантный тензор, так что и надлежит записывать его с двумя индексами, как мы и предчувствовали.

Аналогично предыдущему, нетрудно показать, что суммы

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = (ds)^2 \tag{8.1.7}$$

и $g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu$ являются скалярными инвариантами; это происходит потому, что производные появляются в правильном порядке в одном случае и в "перевернутом виде" в другом случае, так что после суммирования получаются δ-символы Кронекера.

Это наводит на мысль, что мы можем использовать метрический тензор $g_{\mu\nu}$ для того, чтобы определить векторные компоненты иного рода, имеющие другой закон преобразования

$$\begin{aligned} &(\text{а}) \quad A_\beta = g_{\alpha\beta}A^\alpha, \\ &(\text{б}) \quad A_\beta(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta}A_\mu(x), \end{aligned} \tag{8.1.8}$$

которые мы будем называть ковариантными компонентами вектора. Скалярные инварианты, которые могут быть порождены суммированием, есть

$$A_\beta B^\beta. \tag{8.1.9}$$

При преобразованиях с индексами, которые мы проводим, будет важно следить за верхними и нижними индексами; в общем случае,

будут допустимы суммирования только по одному нижнему и одному верхнему индексу. Например, в специальном случае ортогональных координат специальной теории относительности собственное время может быть теперь записано, как

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu. \tag{8.1.10}$$

Тензор $\eta_{\mu\nu}$ – диагональный и имеет компоненты $(1, -1, -1, -1)$.

Всякий раз, когда векторная величина появляется в физической задаче, например векторный потенциал в электродинамике, эта величина будет появляться в качестве или ковариантного, или контравариантного вектора. Но мы можем всегда построить один из другого, используя метрический тензор; мы можем всегда опустить или поднять индексы по своему желанию, умножая на величины $g_{\mu\nu}$ или на компоненты матрицы, обратной к этой матрице. Можно построить тензоры, которые были бы частично ковариантны, частично контравариантны; такие тензоры имеют несколько верхних индексов, несколько нижних, и важно записать эти индексы таким образом, чтобы не было вопроса относительно их порядка

$$g_{\mu\alpha} T^{\mu\nu} = T_\alpha{}^\nu. \tag{8.1.11}$$

Для специального типа симметрических тензоров $g_{\mu\nu}$ или $g^{\mu\nu}$ мы можем ослабить это правило, так как поднятие или опускание индекса производит просто δ-символ Кронекера

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu. \tag{8.1.12}$$

Мы не будем утомлять себя тем, чтобы вновь рассматривать доказательства этих соотношений, поскольку они получены много лет тому назад и могут быть найдены во множестве книг. Все они использовались Эйнштейном, который придумал эти обозначения, что упростило работу с ними, и он является "надежным малым" ("reliable guy"), когда придумывает подобные штуки. Перемещение индексов, поднятие их или опускание, есть нечто мнемонические, так как это соответствует перемещению индексов в производных, которые определяют эти преобразования, в соотношениях (8.1.3), (8.1.4), (8.1.5) и (8.1.8).

Нет фундаментального физического различия между ковариантными и контравариантными компонентами вектора; они имеют одинаковое физическое содержание и меняется только их представление. Для случая двух измерений мы можем легко показать графически, как представления векторов отличаются. Так как преобразования

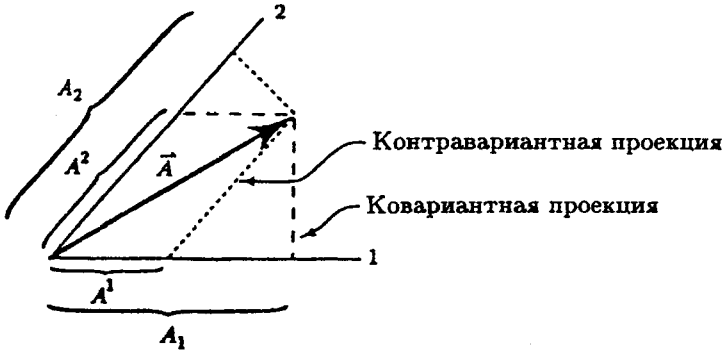

Рис. 8.1.

определяются как инфинитезимальные перемещения, нам нет нужды беспокоиться о кривизне пространства; все, что здесь заключено, это наличие ортогональности или ее отсутствие. Если оси координат не пересекаются под прямым углом, то имеется два способа проектирования физического смещения на оси: или перпендикулярно на ось, или параллельно другим осям, как показано на рис. 8.1. Мы видим, что тензорные компоненты $g_{\mu\nu}$ описывают отсутствие ортогональности координат в заданной точке.

8.2. Уравнения, определяющие инварианты $g_{\mu\nu}$

Теперь, когда у нас есть лучшее понимание роли метрического тензора, мы можем приступить к изучению того, какие величины могут быть построены из него, причем величины, остающиеся инвариантными при инфинитезимальных координатных преобразованиях.

То, что мы собираемся сделать сейчас, в точности совпадает с тем, что мы делали некоторое время назад при построении лагранжиана. Предположим, что мы делаем небольшое изменение в координатах

$$x^\mu = x'^\mu + \zeta^\mu(x'), \tag{8.2.1}$$

где предполагается, что ζ^μ достаточно малы, так что нам необходимо сохранять только члены первого порядка малости по ζ^μ. Тогда для производных справедливы следующие соотношения

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \delta^\alpha_\mu + \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x'^\mu}. \tag{8.2.2}$$

Когда мы вычисляем новые компоненты $g'_{\mu\nu}$, мы получаем произведение двух таких производных

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\alpha\beta}(x' + \zeta)\left(\delta^\alpha_\mu + \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x'^\mu}\right)\left(\delta^\beta_\nu + \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x'^\nu}\right). \tag{8.2.3}$$

Если мы оставляем только члены нулевого порядка и первого порядка малости по ζ^μ, то получаем

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x') + g_{\alpha\nu}\frac{\partial\zeta^\alpha}{\partial x'^\mu} + g_{\mu\beta}\frac{\partial\zeta^\beta}{\partial x'^\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x'^\sigma}\zeta^\sigma. \tag{8.2.4}$$

Новые компоненты $g'_{\mu\nu}$ равны старым компонентам $g_{\mu\nu}$ плюс некоторые члены порядка ζ^μ. Когда теперь мы спрашиваем, какие функции $g_{\mu\nu}$ допускаются, если настаиваем, чтобы их форма осталась инвариантной, мы видим, что мы приходим к той же самой задаче, которую решили в лекции 6. Математическая задача является той же самой как и тогда, когда мы пытались найти лагранжиан, который приводил к сохраняющемуся тензору энергии-импульса.

Таким образом, имеется более чем одна точка зрения, которая приводит к одному и тому же уравнению и которая имеет то же самое физическое содержание. Мы обнаружили, что преобразование, которое возникло тогда, когда мы искали лагранжиан для гравитации, появляется также в решении чисто геометрической задачи. Мы предполагаем, следовательно, что некоторые физические и геометрически звучащие критерии эквивалентны; самосогласованность предыдущего подхода, к которому мы пришли, исходя из требования равной нулю дивергенции, должна быть эквивалентна тому условию, которое мы накладываем сейчас. В чем состоит физическая значимость инвариантов $g_{\mu\nu}$?

Уравнения движения могут быть выведены из вариационного принципа

$$\delta\int ds = \delta\int\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu dx^\nu} = 0. \tag{8.2.5}$$

Эти вычисления могут быть проведены до конца путем введения параметра u, так что квадратный корень под интегралом становится более точно определенной величиной

$$\int du\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\,\frac{dx^\mu}{du}\,\frac{dx^\nu}{du}}. \tag{8.2.6}$$

Когда решение вариационной задачи проведено до конца, получается следующее уравнение геодезических

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = -\Gamma^\mu_{\sigma\tau}\,\frac{dx^\sigma}{ds}\,\frac{dx^\tau}{ds}, \tag{8.2.7}$$

где

$$\Gamma^\mu_{\sigma\tau} = g^{\mu\nu}[\sigma\tau,\nu].$$

Так как вид этого уравнения остается неизменным при изменении метрического тензора при произвольном преобразовании, то эти уравнения должны быть инвариантами метрики $g_{\mu\nu}$, которая содержит в себе физику данной проблемы.

8.3. О предположении, что пространство есть в точности плоское

Давайте попробуем обсудить, что мы узнали при выяснении того, что различные подходы, которые мы использовали, приводят к одним и тем же результатам. Точка зрения, которой мы до сих пор придерживались, состоит в том, что пространство описывается как пространство специальной теории относительности, которое для удобства мы будем называть галилеевым. В таком галилеевом пространстве могут существовать гравитационные поля $h_{\mu\nu}$, которые приводят к тому, что линейки меняются в своей длине и скорости хода часов увеличиваются или уменьшаются. Так что говоря о результатах экспериментов мы вынуждены делать различия между масштабами действительных измерений, физическими масштабами и масштабами, с использованием которых написана эта теория, т.е. галилеевыми масштабами.

Теперь положение состоит в том, что именно физические координаты должны всегда воспроизводить одни и те же результаты. Может быть удобным для того, чтобы написать теорию в начале, предположить, что измерения делаются в пространстве, которое в принципе галилеево, но после того, как мы получим предсказываемые реальные эффекты, мы видим, что галилеево пространство не имеет смысла.

Это приводит к тому, что для нас не имеет смысла заявлять, что выбор координат, который сделал кто-либо другой, является сумасшедшим и бестолковым просто потому, что этот выбор не выглядит для нас галилеевым. Если он настаивает на трактовке такого выбора как галилеева и приписывает кривизну полям, он также абсолютно оправдывается, и это наше пространство выглядит бестолковым для него. Для любого физического результата получается один и тот же ответ независимо от того, какое исходное нанесение меток задано для положений объектов. Следовательно, мы видим, что это может быть философское улучшение, если мы могли бы сформулировать нашу теорию от начала таким способом, что нет галилеева пространства, которое входит в точное определение физики; мы всегда имеем дело с физическим пространством действительных измерений.

Мы можем снова порассуждать о человеке, который делает измерения с помощью физической линейки на раскаленной пластине.

Линейка очевидно меняет длину при ее передвижении от более горячих областей к более холодным. Но все это имеет смысл только потому, что мы знаем нечто, что может измерять расстояния без такой зависимости от температуры, а именно свет. Если мы с помощью световых измерений можем вписать "истинно евклидову" координатную систему на пластину, человек на раскаленной пластине мог бы оценить для нас величину температурного поля, т.е. поля, которое могло бы описывать, как линейка меняет свою длину при передвижении ее по раскаленной пластине. Если, тем не менее, мы обманываем его и вписываем искаженную систему координат на пластине, но продолжаем говорить ему, что система координат евклидова, он даст описание другого температурного поля. Но нет способа, с помощью которого мы могли бы одурачить его, вписывая произвольные координатные системы на пластине, так что мы будем всегда менять результаты физических измерений, которые он проделывает полностью самостоятельно. Пока он использует только длины линеек в приведенных расстояниях, он будет всегда приходить к одним и тем же ответам независимо от того, к каким бы сумасшедшим температурным полям он мог бы придти, используя координаты, которые мы могли бы ему определить.

Эта ситуация совершенно ясна для случая раскаленной пластины, как для евклидова, так и неевклидова пространства, но только потому, что мы предположили, что тепло не оказывает влияния на световые измерения. Для случая гравитации, однако, мы знаем, что нет масштаба, который бы не искажался, т.е. нет такого "света", который бы не искажался гравитацией, и с помощью которого мы могли бы определить галилееву координатную систему. Таким образом, все координатные системы эквивалентны, и они отличаются только тем, что различные величины для полей необходимы для описания скорости хода часов или масштабов длин. Как только мы сконцентрировались на описании физических измерений, координатная система, используемая вначале, исчезает, так как она служит только для удобной расстановки меток, как метки в книгохранилище.

Есть один случай, в котором имеет смысл галилеева или евклидова координатная система, это предельный случай нулевой гравитации или предельный случай однородной температуры на раскаленной пластине. В этом случае физические и евклидовы расстояния описываются одной и той же геометрией. Если мы первоначально исходили из искривленного нанесения меток положений, то мы могли бы обнаружить, что некоторое координатное преобразование не позволяет нам описать измерения без использования поля. Это существенное

упрощение, но вновь это упрощение не обусловлено внутренней справедливостью евклидова описания геометрии, но тем фактом, что она соответствует определенной физической ситуации, которая обладает определенной физической простотой.

Если силы равны нулю всюду, то и символы Г должны быть равны нулю всюду. Если эти силы не всюду равны нулю, то нет возможности определения "наилучшей" системы координат. Однако возможно сделать их локально равными нулю (согласно принципу эквивалентности!).

8.4. О соотношениях между различными подходами к теории гравитации

Одна из своеобразных особенностей теории гравитации состоит в том, она имеет и полевую интерпретацию, и геометрическую интерпретацию. Так как эти интерпретации на самом деле являются двумя аспектами одной и той же теории, мы могли бы предположить, что венерианские ученые, после развития их полной полевой теории гравитации, могли бы в конце концов придти к геометрической точке зрения. Мы не можем быть абсолютно уверены в этом, так как никто никогда еще не смог объяснить индуктивное рассуждение, никто не смог объяснить как продолжить анализ, когда мы знаем очень мало, для того, чтобы знать существенно больше.

В любом случае истина состоит в том, что поле спина 2 имеет геометрическую интерпретацию; это не является чем-то легко объяснимым, это удивительный факт. Геометрическая интерпретация не является действительно необходимой или существенной для физики. Возможно, что такое полное совпадение может быть понято как представление некоторого рода калибровочной инвариантности. Возможно, что отношения между этими двумя точками зрения на гравитацию могли бы стать ясными после того, как мы обсудим третью точку зрения, исходя из которой, мы должны исследовать общие свойства полевых теорий при преобразованиях. Такая точка зрения будет рассматриваться нами много позже, мы обсуждаем этот вопрос здесь для того, чтобы получить ощущения тех возможных направлений, которые должны быть учтены при попытках понять, как гравитация может быть и геометрией, и полем.

Давайте сейчас и рассмотрим, что такое калибровочная инвариантность. Как обычно утверждается в электродинамике, это означает, что если мы заменяем векторный потенциал A на

$$A' = A + \nabla X, \tag{8.4.1}$$

уравнения поля и физические эффекты остаются неизменными, вы-

раженными через новый векторный потенциал A'. Этот факт может быть связан со свойством фазовой инвариантности амплитуд. Давайте теперь посмотрим, что происходит с квантово-механическими амплитудами; совершенно ясно, что если мы используем

$$\psi' = \exp(ia)\psi,$$

при вычислении вероятности, то ничего не меняется в предсказываемой физике. В общем константа a не приводит к появлению различий в предсказаниях. Что же происходит, если вместо константы a мы используем функцию X, которая меняется от точки к точке в пространстве? Уравнения всегда включают в себя градиенты ψ', которые есть

$$\nabla\psi' = \exp(iX)(\nabla\psi + i\psi\nabla X). \tag{8.4.2}$$

Однако оператор $(\nabla - iA')$ оставляет функцию такой, что она изменилась только по фазе

$$(\nabla - iA')\psi' = \exp(iX)(\nabla - iA)\psi. \tag{8.4.3}$$

Так что если имеется векторное поле, которое взаимодействует так, как мы предполагали, уравнения являются инвариантными при зависящих от пространства-времени фазовых преобразованиях этих ψ полей.

Теория векторного мезона Янга – Миллса является попыткой распространить идею калибровочного преобразования рассмотрением таким же способом инвариантности ядерного взаимодействия при изменении изотопического спина. Если амплитуда протона представляется величиной ψ, тогда

$$\psi' = \exp(i\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})\psi, \tag{8.4.4}$$

описывает объект, который частично является протоном, частично нейтроном. Если $\boldsymbol{a}$ есть постоянный вектор в изоспиновом пространстве, то инвариантность ядерных сил по отношению к изменениям изотопического спина означает, что новый объект ψ' действует во всех ядерных реакциях как ψ. Предложение Янга и Миллса состоит в том, что поле должно быть добавлено к лагранжиану таким способом, чтобы *пространственно-зависимая* фазовая замена ($\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{X}$) не приводила к различиям в уравнениях.

Как такие идеи могут быть связаны с гравитацией? Уравнения физики являются инвариантными, когда мы делаем координатные замены с любыми постоянными значениями a^μ

$$x' = x^\mu + a^\mu. \tag{8.4.5}$$

Для того, чтобы сделать формально более похожими фазовые и изоспиновые преобразования, можно было бы воспользоваться импульсным представлением, так что оператор сдвига есть

$$\exp(ip_\mu a^\mu).$$

С другой стороны, возможно исследовать, каким образом уравнения физики могут быть сделаны инвариантными в том случае, когда мы допускаем зависящие от координат в пространстве *переменные* смещения ($a^\mu \to \zeta^\mu$). Исследование будет проводиться для более полного лагранжиана; новые члены, которые необходимы, являются в точности теми же самыми, что и для гравитационного поля. Таким образом, гравитация является тем полем, которое соответствует калибровочной инвариантности по отношению к преобразованиям смещения.

8.5. Кривизна как величина, относящаяся к касательному пространству

Мы можем рассмотреть данный вопрос геометрически, как Эйнштейн, и обратиться к кривизне и таким понятиям, которые выражаются на языке предельного перехода для величины радиуса и длины окружности. Только для того, чтобы показать, что подобный подход не является слишком сложным, мы используем его. Теперь, когда мы осознаем, что мы делаем, мы можем сделать более общие координатные преобразования. Мы говорили о том, каково было число производных. У нас была возможность сказать, что мы можем положить

$$g^0_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \tag{8.5.1}$$

путем соответствующего выбора шестнадцати первых производных $\partial x^\alpha/\partial x'^\nu$. Мы предполагаем также, что мы можем выбрать сорок вторых производных ($\partial^2 x^\alpha/\partial x'^\mu \partial x'^\nu$) таким образом, что все первые производные $g^0_{\mu\nu}$ равны нулю. Тогда имеется восемьдесят выбранных третьих производных и сотня вторых производных величины $g_{\mu\nu}$. Есть двадцать линейных комбинаций этих вторых производных, причем эти комбинации могут иметь геометрическое определение. Они не могут быть устранены преобразованием координат. То, что мы будем искать – это выражение для двадцати таких величин на языке исходных величин $g_{\mu\nu}$. Мы делаем данную процедуру в три шага, возвращаясь назад, так сказать. Сначала мы предполагаем, что выбрали первые и вторые производные (в выбранной точке путем преобразования к римановым нормальным координатам) таким образом, что $g^0_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ и $g^0_{\mu\nu,\sigma} = 0$, и находим выражение для двадцати величин. Затем мы будем беспокоиться о том, как мы можем добиться

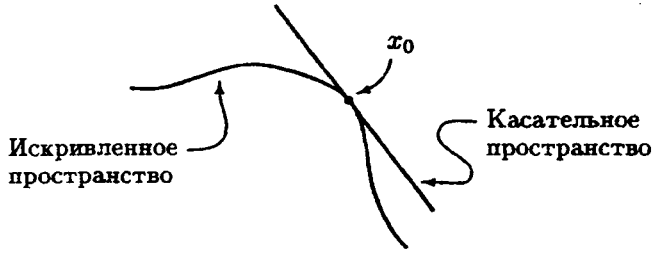

Рис. 8.2.

выполнения этих условий и так выбрать новые координаты, исходя из произвольных начальных координат, чтобы получить эти двадцать величин через исходные величины $g_{\mu\nu}$.

Сначала мы обсудим геометрически определяемые величины в терминах координат в касательном пространстве в точке. То, что мы делаем в пространстве с четырьмя измерениями, аналогично следующей ситуации в двумерном пространстве. Искривленное пространство можно рассматривать как поверхность и сравнить геометрию поверхности в данной точке с геометрией, рассматриваемой с касательной плоскости, как показано на рис. 8.2. Исходные координаты на искривленном пространстве вообще говоря неортогональны и не являются соответствующим образом ориентированными для того, чтобы допустить простейшее описание геометрии на языке инварианта $1/(R_1R_2)$. Первый шаг состоит в том, чтобы определить эту внутреннюю кривизну на языке исходной геометрии.

Только вторые производные начинают описывать в данной точке отклонение искривленного пространства от плоского. Величины, характеризующие кривизну пространства, являются в точности мерой рассогласования между поверхностью и касательной плоскостью. Эти величины дают описание самого существенного характера пространства в заданной точке. Так как мы включили в рассмотрение только первые, вторые и третьи производные координат, то мы имеем достаточно общее преобразование в следующем виде:

$$x^\alpha = x'^\alpha + \frac{1}{2}\, a^\alpha{}_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu + \frac{1}{6}\, b^\alpha{}_{\mu\nu\sigma} x'^\mu x'^\nu x'^\sigma . \qquad (8.5.2)$$

Наша задача состоит в том, чтобы выбрать двадцать существенных комбинаций. Для первых производных мы имеем следующие выражения:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \delta^\alpha{}_\mu + a^\alpha{}_{\mu\nu} x'^\nu + \frac{1}{2}\, b^\alpha{}_{\mu\nu\sigma} x'^\nu x'^\sigma . \qquad (8.5.3)$$

В этом частном касательном пространстве метрические тензоры мо-

гут быть записаны в достаточно общем виде как

$$g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} x'^{\sigma} x'^{\tau} g^{0'}{}_{\alpha\beta,\sigma\tau},$$
$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} x^{\sigma} x^{\tau} g^{0}_{\alpha\beta,\sigma\tau}. \tag{8.5.4}$$

Верхний индекс "0" означает то, что рассматриваемая величина берется в точке касания x_0. Мы получаем соответствующие инвариантные комбинации, рассматривая то, что мы имеем две произвольные системы координат в касательном пространстве, и требуем, что одни и те же формулы должны выполняться в обоих случаях. Так как эти пространства – касательные, то производные координат могут отличаться только квадратичными членами, так что

$$a^{\alpha}{}_{\mu\nu} = 0. \tag{8.5.5}$$

Тогда необходимо только подставить одно преобразование в другое. Подставляя закон преобразования $g_{\mu\nu}$, используя соотношения (8.5.3) для производных, находим

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} = \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(g^{0}_{\alpha\beta,\sigma\tau} + \eta_{\alpha\nu} b^{\nu}_{\beta\sigma\tau} + \eta_{\beta\nu} b^{\nu}_{\alpha\sigma\tau}) x'^{\sigma} x'^{\tau}. \tag{8.5.6}$$

Для вторых производных величин $g_{\mu\nu}$ имеем следующие соотношения

$$g'^{0}_{\alpha\beta,\sigma\tau} = g^{0}_{\alpha\beta,\sigma\tau} + b_{\alpha\beta\sigma\tau} + b_{\beta\alpha\sigma\tau}, \tag{8.5.7}$$

где

$$b_{\alpha\beta\sigma\tau} \equiv \eta_{\alpha\nu} b^{\nu}{}_{\beta\sigma\tau}.$$

Теперь, когда мы имеем эти соотношения, мы хотим получить линейные комбинации вторых производных компонентов метрики, которые не имели бы величин $b_{\alpha\beta\sigma\tau}$. Мы используем тот факт, что величины $b_{\alpha\beta\sigma\tau}$ полностью симметричны по их трем последним индексам, в то время как $g_{\alpha\beta,\sigma\tau}$ симметричны только по индексам $\sigma\tau$. Переставим индексы ($\beta \leftrightarrow \sigma$) и, вычитая соответствующие выражения, получим

$$g'^{0}_{\alpha\beta,\sigma\tau} - g'^{0}_{\alpha\sigma,\beta\tau} - g^{0}_{\alpha\beta,\sigma\tau} + g^{0}_{\alpha\sigma,\beta\tau} = b_{\beta\alpha\sigma\tau} - b_{\sigma\alpha\beta\tau}. \tag{8.5.8}$$

Индексы ($\alpha\tau$) входят абсолютно симметрично в правую часть этого соотношения, но это утверждение не обязательно для левой части.

Следовательно, при антисимметрировании по индексам $(\alpha - \tau)$ мы получаем следующее соотношение

$$R_{\alpha\tau\beta\sigma} = \frac{1}{2}\left(g^0_{\alpha\beta,\sigma\tau} - g^0_{\alpha\sigma,\beta\tau} - g^0_{\tau\beta,\sigma\alpha} + g^0_{\tau\sigma,\beta\alpha}\right), \tag{8.5.9}$$

величину, которая равна самой себе в штрихованной системе координат. Таким образом, имеется двадцать линейных комбинаций, которые мы искали. Эта величина не является тензором; она не является достаточно общей; она определяется только в месте, в котором обращаются в нуль результирующие поля. Эти линейные комбинации являются несократимыми частями гравитационного тензора, теми, которые не могут быть устранены преобразованием системы координат. Они представляют чисто приливные силы. Таким образом, теперь мы имеем определенный рецепт для нахождения кривизны. Сначала найти преобразование (к римановым нормальным координатам), которое связывает величины $g_{\mu\nu}$ с величинами $\eta_{\mu\nu}$, причем первые производные компонент $g_{\mu\nu}$ равны нулю. Тогда выраженные через преобразованные компоненты $g_{\mu\nu}$ величины, определяющие кривизну, задаются соотношениями (8.5.9). Эти соотношения остаются теми же самыми в любой координатной системе. Оставшаяся задача состоит в том, чтобы выразить $R_{\alpha\tau\beta\sigma}$ через исходные произвольные координаты и исходные компоненты $g_{\mu\nu}$.

8.6. Кривизна как величина, относящаяся к произвольным координатам

Вывод выражений для кривизны через общие координаты происходит наиболее гладким образом при использовании способа, состоящего в последовательном восхождении по ступенькам к искомому результату. Далее, мы снимаем ограничение на первые производные (которые теперь могут быть не равными нулю), но оставляем координаты локально ортогональными; тогда выражения $g_{\mu\nu}$ и $g'_{\mu\nu}$ следующие

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta} + g^0_{\alpha\beta,\mu}x^\mu + \frac{1}{2}\, g^0_{\alpha\sigma,\mu\nu}x^\mu x^\nu, \\ g'_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\, g'^0_{\alpha\beta,\sigma\tau}x'^\sigma x'^\tau. \end{aligned} \tag{8.6.1}$$

Величина g' есть та же самая, что и была ранее с нулевыми первыми производными. Так как мы уже выбрали вторые производные, нам необходимо только рассмотреть преобразование типа

$$x^\alpha = x'^\alpha + \frac{1}{2}\, a^\alpha{}_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu. \tag{8.6.2}$$

Кубические члены не будут влиять на правильность приводимого ниже результата. Выражение для первых производных

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \delta^\alpha{}_\mu + a^\alpha{}_{\mu\nu} x'^\nu \tag{8.6.3}$$

вставляем в уравнение, выражающее g' через g,

$$\eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g'^0{}_{\alpha\beta,\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau = \eta_{\alpha\beta} + (g^0_{\alpha\beta,\sigma} + a_{\beta\alpha\sigma} + a_{\alpha\beta\sigma}) x'^\sigma$$
$$+ x'^\sigma x'^\tau \left[a^\rho{}_{\alpha\sigma} a_{\rho\beta\tau} + a^\rho{}_{\alpha\tau} g^0_{\rho\beta,\sigma} + a^\rho{}_{\beta\tau} g^0_{\rho\alpha,\sigma} + \frac{1}{2} a^\rho{}_{\sigma\tau} g^0_{\alpha\beta,\rho} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\sigma\tau} \right], \tag{8.6.4}$$

где $a_{\alpha\beta\sigma} = \eta_{\alpha\mu} a^\mu{}_{\beta\sigma}$. Члены, соответствующие первым производным, будут равными нулю при следующем выборе $a^\alpha{}_{\mu\nu}$:

$$a_{\beta\alpha\sigma} + a_{\alpha\beta\sigma} = -g^0_{\alpha\beta,\sigma}. \tag{8.6.5}$$

Нам необходимо решить это уравнение таким образом, чтобы $a^\alpha{}_{\mu\nu}$ было выражено через $g^0_{\alpha\beta,\sigma}$ исходной системы координат. Эта процедура делается с использованием обычных приемов; вычитаем уравнение, полученное перестановкой (α, σ), затем собираем подобные члены и т.д., и получаем следующее соотношение:

$$a_{\sigma\alpha\beta} = -\frac{1}{2} [g^0_{\sigma\alpha,\beta} + g^0_{\sigma\beta,\alpha} - g^0_{\alpha\beta,\sigma}] = -[\alpha\beta, \sigma]^0. \tag{8.6.6}$$

Из соотношения (8.6.4) видно, что $g'^0{}_{\alpha\beta,\sigma\tau}$ есть (удвоенное) выражение в квадратных скобках в правой части соотношения (8.6.4) с заменой $a_{\sigma\alpha\beta}$ в соответствии с соотношением (8.6.6). Эти величины $g'^0{}_{\alpha\beta,\sigma\tau}$ теперь могут быть заменены на $g^0_{\alpha\beta,\sigma\tau}$ в соотношении (8.5.9) для того, чтобы найти компоненты кривизны, выписанные через старые координаты (ограниченные только тем, что они должны быть локально ортогональными), следующим образом:

$$R_{\alpha\tau\beta\sigma} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta,\sigma\tau} - g_{\alpha\sigma,\beta\tau} - g_{\tau\beta,\alpha\sigma} + g_{\tau\sigma,\alpha\beta})$$
$$+ [\rho\sigma, \alpha] \eta^{\rho\lambda} [\tau\beta, \lambda] - [\rho\beta, \alpha] \eta^{\rho\lambda} [\tau\sigma, \lambda]. \tag{8.6.7}$$

Осталось только ортогонализировать первоначально произвольные координаты. Это может быть сделано линейным преобразованием:

$$x^\alpha = L^\alpha{}_\mu x'^\mu. \tag{8.6.8}$$

Все, что осталось нам сделать, состоит в том, чтобы выбрать

$$g'^{0}{}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}, \tag{8.6.9}$$

и переписать все соотношения еще раз. Производные при выбранном преобразовании определяются матрицей $L^{\alpha}{}_{\mu}$, и мы имеем

$$g'_{\mu\nu} = L^{\alpha}{}_{\mu} L^{\beta}{}_{\nu} g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}. \tag{8.6.10}$$

Среди соотношений, которые могут быть получены, имеется следующее соотношение:

$$\eta^{\alpha\beta} L_{\alpha}{}^{\sigma} L_{\beta}{}^{\mu} = g^{\sigma\mu}. \tag{8.6.11}$$

Что же происходит с различными членами? Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} = L^{\mu}{}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \tag{8.6.12}$$

то, следовательно, (в последующих соотношениях латинские индексы соответствуют штрихованным координатам)

$$g'_{mn,st} = L^{\sigma}{}_{s} L^{\tau}{}_{t} L^{\mu}{}_{m} L^{\nu}{}_{n} g_{\mu\nu,\sigma\tau}, \tag{8.6.13}$$

$$a'_{rmn} = L^{\rho}{}_{r} L^{\mu}{}_{m} L^{\nu}{}_{n} a_{\rho\mu\nu}, \tag{8.6.14}$$

$$\eta^{rq} a'_{rmn} a'_{qst} = \eta^{rq} L^{\rho}{}_{r} L^{\lambda}{}_{q} L^{\mu}{}_{m} L^{\nu}{}_{n} L^{\sigma}{}_{s} L^{\tau}{}_{t}\, a_{\rho\mu\nu} a_{\lambda\sigma\tau}. \tag{8.6.15}$$

Когда мы вставляем эти соотношения в выражения для компонент R, мы получаем, что R не является более инвариантом. Окончательное выражение для R (при выводе которого используется соотношение (8.6.11)) имеет следующий вид:

$$R_{\alpha\tau\beta\sigma} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\beta,\sigma\tau} - g_{\alpha\sigma,\beta\tau} - g_{\tau\beta,\alpha\sigma} + g_{\tau\sigma,\alpha\beta}\right) + [\rho\sigma,\alpha] g^{\rho\lambda} [\tau\beta,\lambda] - [\rho\beta,\alpha] g^{\rho\lambda} [\tau\sigma,\lambda], \tag{8.6.16}$$

а закон преобразования имеет вид:

$$R'_{mnst} = L^{\mu}{}_{m} L^{\nu}{}_{n} L^{\sigma}{}_{s} L^{\tau}{}_{t} R_{\mu\nu\sigma\tau}. \tag{8.6.17}$$

8.7. Свойства Великого Тензора Кривизны

Хотя величины $R_{\mu\nu\sigma\tau}$ не являются инвариантами, они образуют тензор, как можно было бы заключить из закона преобразования (8.6.17). Легко можно показать, что тензор определяется только двадцатью

величинами, как мы ранее и утверждали. Выражения (8.5.9) были получены путем антисимметризации по индексам (α, τ) и впоследствии по (β, σ). Имеются следующие симметрии для компонент тензора:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\tau\beta\sigma} &= -R_{\tau\alpha\beta\sigma}, && \text{(а)} \\ &= -R_{\alpha\tau\sigma\beta}, && \text{(б)} \\ &= +R_{\beta\sigma\alpha\tau}. && \text{(в)} \end{aligned} \tag{8.7.1}$$

Следующее алгебраическое соотношение содержится неявно в соотношении (8.5.9) (и, следовательно, в соотношении (8.6.16)):

$$R_{\alpha\tau\beta\sigma} + R_{\alpha\sigma\tau\beta} + R_{\alpha\beta\sigma\tau} = 0. \tag{8.7.2}$$

Давайте посчитаем число независимых компонент тензора кривизны. Первый индекс может не быть равным второму, третий не может быть равным четвертому. Только антисимметричные комбинации могут быть не равны нулю – мы напоминаем, что имеется шесть возможно ненулевых компонент для антисимметричного тензора второго ранга, так что за исключением симметрии, связанной с перестановкой первой пары и второй пары, здесь имелось бы 36 компонентов; последняя же симметрия (8.7.1в) уменьшает это число до $(6 \times 7)/2 = 21$. Алгебраическое соотношение, определяемое (8.7.2), содержит только одно нетривиальное ограничение. Если два индекса являются одинаковыми, то соотношение (8.7.2) является тождеством, поскольку имеются симметрии в соотношениях (8.7.1). Например,

$$R_{1\tau1\sigma} + R_{1\sigma\tau1} + R_{11\sigma\tau} = R_{1\tau1\sigma} - R_{1\tau1\sigma} + 0 = 0. \tag{8.7.3}$$

Так что все индексы должны быть различными для того, чтобы это алгебраическое соотношение имело смысл. Но когда все индексы различны (1,2,3,4), то имеется только одно дополнительное уравнение. Итак, в общем случае имеется только двадцать независимых компонент Великого Тензора Кривизны (Тензора Римана).

То, в чем мы нуждаемся для построения нашей теории, это не тензор, а полностью инвариантная величина, которая может быть подставлена в лагранжиан. (Вместо этого, Эйнштейн говорил, что Тензор Энергии-Импульса равен другому тензору, которые получается из тензора кривизны.) Принцип наименьшего действия должен включать в себя интеграл по всему пространству, который должен быть полностью инвариантным под действием преобразований. Подынтегральное выражение должно быть мировой скалярной величиной

$$\int dx\, dy\, dz\, dt \text{ (Скаляр)} = \text{(Скалярный инвариант)}. \tag{8.7.4}$$

Мы получим такой скаляр, поднимая индексы тензора кривизны и свертывая по парам верхних и нижних индексов. Мы можем, например, поднять первый индекс

$$g^{\alpha\lambda}R_{\alpha\tau\beta\sigma} = R^{\lambda}{}_{\tau\beta\sigma}. \tag{8.7.5}$$

Но если в этом месте мы проведем свертывание по первой паре индексов, то эта величина, к сожалению, обращается в нуль

$$R^{\tau}{}_{\tau\beta\sigma} \equiv 0. \tag{8.7.6}$$

То, что необходимо сделать сначала, состоит в уменьшении ранга тензора и свертывании по первому и последнему индексам

$$g^{\alpha\sigma}R_{\alpha\tau\beta\sigma} = R_{\tau\beta}. \tag{8.7.7}$$

(Заметим, что одну и ту же букву R удобно использовать для всех тензоров, получаемых из тензора кривизны.) Этот тензор второго ранга (тензор Риччи) – симметричен. Затем мы вновь уменьшаем ранг тензора для того, чтобы получить нашу скалярную величину ("скалярную кривизну") для подынтегрального выражения

$$g^{\alpha\sigma}g^{\tau\beta}R_{\alpha\tau\beta\sigma} = g^{\tau\beta}R^{\sigma}{}_{\tau\beta\sigma} = R^{\sigma\beta}{}_{\beta\sigma} = R. \tag{8.7.8}$$

Теперь интеграл по объему от этого скаляра не является инвариантом, поскольку элемент объема не является скаляром; величина $dx\,dy\,dz\,dt$ меняется при изменении координат, причем это изменение определяется определителем матрицы $L_{\alpha}{}^{\mu}$. Таким образом, интеграл от инварианта есть

$$\int dx\ dy\ dz\ dt\ R\ \sqrt{-g}. \tag{8.7.9}$$

Это выражение определяет действие Эйнштейна—Гильберта для пустого пространства [Hilb 15].