Лекция 9

9.1. Модификация электродинамики, требуемая принципом эквивалентности

Принцип Эквивалентности постулирует, что ускорение будет неотличимым от гравитации в каком бы то ни было эксперименте. В частности, ускорение не может быть отличимо от гравитации по наблюдению электромагнитного излучения. В этом месте у нас возникает некоторое беспокойство, так как мы унаследовали предрассудок, что ускоренно движущийся заряд должен излучать, тогда как мы не ожидаем, что заряд, находящийся в гравитационном поле, излучает. Тем не менее, это обусловлено не ошибкой в нашем утверждении эквивалентности, а тем фактом, что закон, описывающий мощность излучения ускоренно движущегося заряда

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}a^2, \tag{9.1.1}$$

вводит нас в заблуждение. Обычно этот закон выводится из вычисления потока из теоремы Пойнтинга вдали от заряда, и это справедливо только для круговых движений или, по крайней мере, движений, для которых характерен бесконечный рост во времени (как имеет место для постоянного ускорения). Этого закона оказывается недостаточно для того, чтобы сказать нам, "когда" электромагнитная энергия излучается. Ответ на этот вопрос может определяться только путем нахождения силы радиационного трения, которая есть $(2/3)\cdot(e^2/c^3)\dot{\boldsymbol{a}}$. Работа против этой силы представляет собой потери энергии. Для постоянного ускорения эта сила равна нулю. Вообще говоря, работа, совершаемая против этой силы, может быть записана в виде

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{a}} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}), \tag{9.1.2}$$

дающая правильное выражение для dW/dt. Для круговых или ограниченных движений средний вклад последнего члена по достаточно большому времени мал или равен нулю (через один цикл, так как величина $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}$ сохраняет свое значение, то его вклад равен нулю) и для вычисления мощности излучения достаточно более простого соотношения (9.1.1).

Конечно, в гравитационном поле законы электродинамики Максвелла должны быть модифицированы для того, чтобы удовлетворить

принцип относительности. В конце концов законы Максвелла предсказывают, что фотон должен двигаться по прямой линии, и обнаружено, что фотон искривляется звездой ("падает на звезду"). Ясно, что некоторое взаимодействие между гравитацией и электродинамикой должно быть включено в более точную формулировку законов электричества для того, чтобы сделать их согласованными с принципом эквивалентности.

Мы не будем завершать построение нашей теории гравитации до тех пор, пока мы не обсудим такие модификации электродинамики, а также механизмы излучения, приема и поглощения гравитационных волн.

9.2. Ковариантные производные тензоров

В предыдущей лекции мы видели, как понятие кривизны возникает при обсуждении геометрических измерений. Мы можем получить более интересное представление о том, как четырехмерная кривизна будет влиять на наш взгляд на физику, рассматривая более удачное приближение, которое состоит в том, чтобы определить кривизну как величину, описывающую, что происходит с вектором при перемещении его в пространстве. Давайте представим вновь наш двумерный мир. Если мы используем плоские евклидовы координаты, то постоянное векторное поле, существующее в пространстве, описывается постоянными компонентами. Если мы используем некоторые другие координаты, в общем случае искривленные, постоянное векторное поле описывается компонентами, которые меняются от точки к точки. Хорошо знакомый пример состоит во введении на плоскости полярных координат, в которых постоянный вектор описывается компонентами

$$\begin{aligned}(A\cos\theta + B\sin\theta) &= F_r,\\ (B\cos\theta - A\sin\theta) &= F_\theta.\end{aligned} \tag{9.2.1}$$

Первое, что мы должны сделать состоит в том, чтобы получить соотношения, которые позволят нам сравнить физически значимое различие между тензором в данной точке и его значением в окружающих точках. По сути дела мы хотим описать изменение тензора, которое до известной степени исключало бы изменения компонентов, вызываемые произвольным выбором координат. Например, мы хотим сравнить вектор в точке x^μ с другим вектором, находящимся в точке, характеризуемой инфинитезимальным смещением dx^μ от заданной точки, перенесением одного из векторов, остающегося постоянным (более точно, остающегося параллельным самому себе) в некоторую другую точку.

Для скалярной функции (тензора нулевого ранга) подобная проблема не составляет проблем. Обычное градиентное преобразование определяется соотношением

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\sigma}}, \tag{9.2.2}$$

так что градиент скаляра есть очевидно ковариантный вектор. Тем не менее, обычные градиенты векторов или тензорных величин более высокого порядка не являются тензорами; в этом случае в законе преобразования имеются члены, зависящие от случайности при выборе координат. Мы выводим соответствующее выражение для производной путем рассмотрения, как такие объекты выглядят в касательном пространстве. Так как касательное пространство – плоское, производные компонентов не содержат членов, обусловленных искривлением координат, и градиенты векторов по отношению к плоским координатам являются тензорами. Мы получим соотношение для этих тензоров в любых координатах, делая обратное преобразование от плоского пространства к произвольным координатам. Как обычно, мы употребляем разложения для того, чтобы получить такие соотношения. ("Штрихованные" координаты соответствуют плоскому пространству.) Пусть

$$\begin{aligned} x^{\nu} &= x'^{\nu} + \frac{1}{2}\, a^{\nu}{}_{\sigma\tau} x'^{\sigma} x'^{\tau} + \ldots, \\ \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} &= \delta^{\nu}_{\mu} + a^{\nu}{}_{\sigma\tau} x'^{\sigma} + \ldots . \end{aligned} \tag{9.2.3}$$

Используя первые члены разложения, получим

$$A_{\mu}(x) = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A'_{\nu}(x').$$

Поскольку мы можем переписать выражение для производной, используя соотношение (9.2.3), то получим

$$A_{\mu}(x) = A'_{\mu}(x') + a^{\nu}{}_{\mu\lambda} x'^{\lambda} A'_{\nu}(x') + \ldots . \tag{9.2.4}$$

Теперь возьмем градиент этого выражения по отношению к произвольным координатам и вычислим эту величину в начале координат

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\sigma}}\right)_0 &= \frac{\partial}{\partial x'^{\tau}} \left(A'_{\mu}(x') + a^{\nu}{}_{\mu\lambda} x'^{\lambda} A'_{\nu}(x')\right)_0 \left(\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\sigma}}\right)_0 \\ &= \frac{\partial A'_{\mu}(x')}{\partial x'^{\sigma}} + a^{\nu}{}_{\mu\sigma} A'_{\nu}(x'). \end{aligned} \tag{9.2.5}$$

Именно поскольку эта величина берется в начале координат, все члены, линейные по x', равны нулю. Таким образом, мы получаем производную "для плоского пространства" на языке произвольных координат

$$\left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\sigma} - a^\nu{}_{\mu\sigma} A_\nu\right] = \frac{\partial A'_\mu}{\partial x'^\sigma}. \tag{9.2.6}$$

Если теперь мы запишем $a^\nu{}_{\mu\sigma}$ через метрические тензоры, то мы получаем соотношение для "более правильной" производной. Эта величина является тензором и известна как ковариантная производная вектора A_τ. Для того, чтобы отличить эту производную от градиентов, мы будем использовать точку с запятой для обозначения ковариантного дифференцирования

$$A_{\mu;\tau} \equiv \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\tau} - \Gamma^\sigma_{\mu\tau} A_\sigma. \tag{9.2.7}$$

Доказательство того, что эта величина есть тензор, достаточно утомительно, но очень просто; все, что для этого требуется, состоит в том, чтобы преобразовать все координаты к координатам в плоском пространстве, непосредственно вычислить производную и затем проверить полученный закон преобразования. Правило для дифференцирования контравариантного вектора аналогично предыдущему

$$A^\mu{}_{;\sigma} \equiv \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\tau} A^\tau. \tag{9.2.8}$$

Последнее соотношение может быть доказано более просто, если мы исходим из соотношения (9.2.7) и используем метрический тензор для поднятия и опускания индексов; перестановка метрических тензоров приводит к тому, что величина Г меняет знак. Для того, чтобы вычислять ковариантную производную тензора, имеющего много индексов, получаем следующее правило

$$T^{\mu\nu}{}_{\rho;\sigma} = \frac{\partial T^{\mu\nu}{}_\rho}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} T^{\sigma\nu}{}_\rho + \Gamma^\nu_{\lambda\sigma} T^{\mu\sigma}{}_\rho - \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} T^{\mu\nu}{}_\sigma. \tag{9.2.9}$$

Другими словами, каждый индекс приводит к тому, что добавляется член, который включает в себя Г и сам тензор. Вряд ли нужно какое-либо другое мнемоническое правило; ковариантная производная вычисляется одинаково для верхних и нижних индексов, причем вычисление производной для верхних индексов идентифицируется со знаком "+", а для нижних индексов со знаком "-", тем самым только это и надо запомнить.

Наиболее хорошо известный пример таких преобразований – это формула для ротора вектора в сферических координатах; эти формулы всегда включают в себя обычные производные, умноженные на величины компонентов этого вектора.

Полезно еще одно соотношение для ковариантных производных. Так как ковариантные производные метрического тензора равны нулю, как легко может быть показано,

$$g^{\mu\nu}{}_{;\sigma} = 0, \tag{9.2.10}$$

то следующее правило применимо для произведения

$$(A^\mu B^\nu)_{;\sigma} = A^\mu B^\nu{}_{;\sigma} + A^\mu{}_{;\sigma} B^\nu. \tag{9.2.11}$$

Для того, чтобы показать, что подобные соотношения действительно связывают тензорные величины, всегда допустимо так выбрать координаты, чтобы сделать доказательство проще; тензоры являются такими математическими величинами, что тензорные соотношения, доказанные в одной координатной системе, остаются справедливыми для всех других координат. Последнее соотношение легко может быть доказано при использовании перехода к плоскому касательному пространству; ковариантная производная равна обычной производной в таком пространстве.

Одно из действий кривизны состоит в том, что вторая ковариантная производная не коммутирует с первой. Мы можем явно вычислить такие величины путем повторяющегося использования соотношения (9.2.9). Сначала получаем, что

$$A^\mu{}_{;\sigma;\tau} = [A^\mu{}_{;\sigma}]_{;\tau} = \frac{\partial[A^\mu{}_{;\sigma}]}{\partial x^\tau} + \Gamma^\mu_{\tau\lambda}[A^\lambda{}_{;\sigma}] - \Gamma^\lambda_{\sigma\tau}[A^\mu{}_{;\lambda}], \tag{9.2.12}$$

и повторное дифференцирование дает нам

$$A^\mu{}_{;\sigma;\tau} = \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x^\tau \partial x^\sigma} + \frac{\partial}{\partial x^\tau}\left(\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} A^\lambda\right) + \\ + \Gamma^\mu_{\tau\lambda}\left(\frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\lambda_{\sigma\rho} A^\rho\right) - \Gamma^\lambda_{\sigma\tau}\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\rho} A^\rho\right). \tag{9.2.13}$$

Некоммутативность порядка операций взятия ковариантных производных видна, когда мы вычисляем их разность

$$A^\mu{}_{;\sigma\tau} - A^\mu{}_{;\tau\sigma} = \left[\Gamma^\mu_{\sigma\rho,\tau} - \Gamma^\mu_{\tau\rho,\sigma} + \Gamma^\mu_{\tau\lambda}\Gamma^\lambda_{\rho\sigma} - \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda_{\rho\tau}\right] A^\rho. \tag{9.2.14}$$

Множитель, на который умножается вектор A^ρ, должен быть тензором, поскольку величина в левой части последнего соотношения

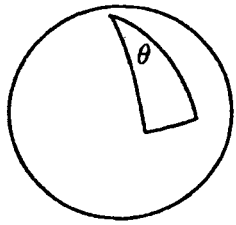

Рис. 9.1.

является разностью тензоров. Этот множитель в точности является тензором кривизны, так что

$$A^{\mu}{}_{;\sigma\tau} - A^{\mu}{}_{;\tau\sigma} = R^{\mu}{}_{\rho\sigma\tau} A^{\rho}. \tag{9.2.15}$$

9.3. Параллельный перенос вектора

Тот факт, что тензор кривизны появляется в связи с вычислением второй ковариантной производной, служит нам той путеводной нитью, которая позволяет нам дать другую полезную геометрическую интерпретацию кривизны. Свойство некоммутативности вторых производных представляет собой предел разности векторов в том случае, если мы вначале перемещаем его вдоль оси σ, затем вдоль оси τ или сначала вдоль оси τ, затем вдоль оси σ. Если координаты плоские, то для постоянного вектора нет отличий. Если мы имеем искривленное пространство и если мы делаем такие перемещения в различном порядке, то мы находим некоторый результирующий вектор. Значимость подобных рассмотрений для получения физических утверждений становится очевидной, когда мы осознаем, что мы не имеем физического способа определения "подлинно постоянного" векторного поля, за исключением того, чтобы сказать, что это такое векторное поле, чьи компоненты имеют нулевые производные в касательном пространстве.

Как кривизна появляется при рассмотрении переноса вектора, остающегося параллельным самому себе при перемещении его по поверхности, хорошо иллюстрируется в сферической геометрии. Мы будем представлять себе, что мы переносим маленький вектор с северного полюса по меридиану до экватора, затем вдоль экватора на угол θ и возвращаем его назад на северный полюс, как показано на рис. 9.1, причем всегда переносим вектор таким образом, чтобы он оставался параллельным самому себе и был направлен на юг. Когда мы возвращаем вектор назад на северный полюс, мы видим, что наш вектор повернулся на угол θ. Кривизна K поверхности определяется через угол, на который вектор поворачивается в том случае, если

мы рассматриваем перенос этого вектора вдоль инфинитезимальной замкнутой траектории. Для поверхности

$$\delta\theta = (\text{Площадь внутри замкнутой кривой}) \cdot K. \tag{9.3.1}$$

Для случая треугольника на сферической поверхности этот угол в точности есть превышение (над величиной 180°) суммы углов треугольника. Для сферической поверхности эта кривизна просто равна $1/R^2$.

Обобщенное определение кривизны многомерной поверхности будет даваться через изменение вектора при его переносе вдоль замкнутой кривой, причем при таком переносе, который оставляет вектор параллельным самому себе. Так как ориентация траектории, лежащей на определенной плоскости, зависит от двух осей координат, то мы видим, что кривизна в общем случае является тензором четвертого ранга. В трехмерном пространстве мы могли бы разбить сферическую поверхность проведением "радиально" внешней части от точки для заданного измеренного расстояния вдоль наикратчайших измеренных траекторий (геодезических). Компоненты кривизны вдоль различных направлений должны бы соответствовать незначительному отклонению от 2π длин больших кругов сферической поверхности.

Наглядное представление понятия кривизны на языке более простого пространства, погруженного в пространство с более высокой размерностью, требует введения одного дополнительного измерения для каждого независимого компонента метрического тензора. Для двумерных пространств имеется три компонента метрики, и отсюда следует, что достаточно трех измерений. Для трех измерений метрический тензор имеет шесть независимых компонентов и для четырех измерений имеется десять независимых компонентов.

Определение компонентов кривизны на языке изменения вектора при переносе его вдоль траектории является более общим, чем определение через дефекты в окружностях, которое не воспроизводит все признаки кривизны.

Связь со второй ковариантной производной может быть легко вычислена, когда мы рассматриваем последовательные перемещения вектора, сохраняя его параллельным самому себе. Так как мы проходим вдоль траектории на рис. 9.2, разность в этом векторе, получающаяся при прохождении вдоль этой траектории, должна быть

$$\delta^2 A^\mu = R^\mu{}_{\nu\sigma\tau} A^\nu \Delta_1 x^\sigma \Delta_2 x^\tau. \tag{9.3.2}$$

Так как кривизна есть тензор, антисимметричный по индексам (σ, τ), билинейные произведения $\Delta_1 x^\sigma \Delta_2 x^\tau$ могут быть заменены на вели-

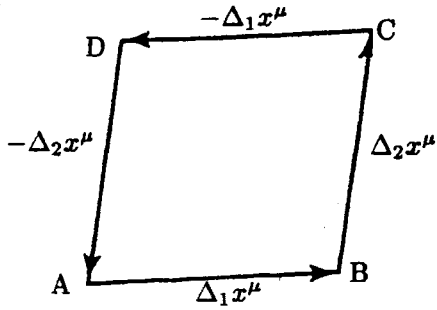

Рис. 9.2.

чину $1/2(\Delta_1 x^\sigma \Delta_2 x^\tau - \Delta_1 x^\tau \Delta_2 x^\sigma)$, которые являются половиной компонентов площади параллелограмма. Индексы тензоров имеют значение, которое нетрудно описать словесно; если мы рассматриваем перемещение векторов вдоль небольшой петли в плоскости $(\sigma\tau)$, компонент μ вектора меняется на величину, пропорциональную сумме по другим компонентам A^ν, $R^\mu{}_{\nu\tau\sigma}A^\mu$ и площади петли.

Мы уже очень много говорили о перемещении вектора параллельно самому себе, не делая это понятие математически определенным. При использовании более интуитивных терминов, это просто означает, что мы переносим конец стрелки и основание стрелки на некоторое равное смещение так близко, как только мы можем вдоль прямой линии, которая есть геодезическая. Математическое определение может быть наилучшим образом понято путем рассмотрения уравнения геодезических

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = -\Gamma^\mu_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds}. \tag{9.3.3}$$

Ясно, что вектор (dx^μ/ds) вдоль геодезической представляет тангенциальную скорость Δt^μ вдоль геодезической, которая есть "физическая" прямая линия. Вторая производная (d^2x^μ/ds^2) представляет собой изменение этой скорости за интервал времени Δs

$$\Delta s\left(\frac{d^2x^\mu}{ds^2}\right) = \Delta t^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\sigma}t^\nu\Delta x^\sigma. \tag{9.3.4}$$

Это изменение пропорционально самому вектору t^ν и перемещениям Δx^σ. Определение параллельного переноса аналогично; мы говорим, что вектор A'^μ есть результат переноса параллельно самому себе

$$A'^\mu = A^\mu + \delta A^\mu,$$

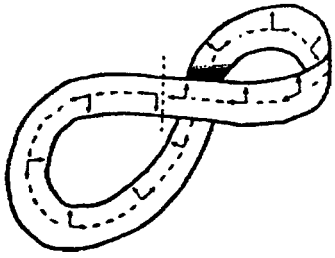

Рис. 9.3.

где

$$\delta A^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} A^{\sigma} \Delta x^{\nu}. \tag{9.3.5}$$

Легко может быть показано, что когда мы перемещаем множество векторов вдоль замкнутой кривой, перемещая каждый из них параллельно самому себе, соотношения между векторами не меняется, так что целое пространство, определенное множеством векторов, поворачивается при движении вдоль петли, это задает полное изменение, вызванное перемещениями. Доказательство этого утверждения состоит в проверке того, что все инвариантные скаляры

$$B^{\mu} A^{\nu} g_{\mu\nu}, \tag{9.3.6}$$

остаются неизменными. Это означает, что длины векторов и углы между векторами сохраняются. Единственное преобразование, которое допускает это, выглядит как поворот целого пространства.

Возможно, что топологические свойства пространства не полностью определяются локальной кривизной. Например, мы получили, что длины векторов сохраняются и углы между векторами сохраняются, когда мы переносим пространство параллельно самому себе. Все же нет гарантии, что для длинной замкнутой траектории отражение недопустимо, также как и вращение. Двумерный пример таких отражений (например, неориентируемая поверхность) имеет место в ленте Мебиуса (рис. 9.3). Если мы возьмем два вектора, один из которых параллелен, другой перпендикулярен центральной линии ленты Мебиуса, и обойдем один раз ленту, двигаясь налево от вертикальной пунктирной линии, показанной рис. 9.3, то пространство не переходит само в себя, а испытывает отражение, обусловленное "скрученностью" поверхности, а не просто поворот.

Теперь, когда мы определили такое понятие, как перенос вектора параллельно самому себе, мы можем получить важную формулу для тензора кривизны при движении по траектории $ABCD$ на рис. 9.2. Разности в векторах при каждом инфинитезимальном перемещении

задаются символами Кристоффеля Г. Но так как эти разности не являются в точности теми же самыми вдоль (AB) и (CD), и даже, если бы эти перемещения были бы противоположны одно другому, вектор не вернулся бы к своей исходной величине. Мы можем понять, каким образом символы Кристоффеля оказываются вовлечены в доказательство этого факта. Выполняя алгебраические преобразования, приходим к соотношению (9.2.14).

Можно показать, что тензор кривизны удовлетворяет тождеству Бианки

$$R^{\mu}{}_{\sigma\alpha\beta;\gamma} + R^{\mu}{}_{\sigma\beta\gamma;\alpha} + R^{\mu}{}_{\sigma\gamma\alpha;\beta} = 0. \tag{9.3.7}$$

Сейчас без подготовки я не стал бы говорить о геометрическом значении тождества Бианки. Имеется обычное уравнение электродинамики, которое может быть записано в виде, идентичном виду тождества Бианки, за исключением числа измерений. Тензор поля задается через векторный потенциал следующим соотношением:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}, \tag{9.3.8}$$

другими словами $F_{\mu\nu}$ – ротор некоторого вектора. Но свойства $F_{\mu\nu}$, содержащиеся в утверждении, что $F_{\mu\nu}$ есть ротор, эквивалентным образом также хорошо описываются тождеством

$$F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\sigma\mu,\nu} = 0, \tag{9.3.9}$$

которое имеет вид, похожий на тождество Бианки. Свойства ротора могут быть связаны с криволинейным интегралом, если мы используем теорему Стокса[1]

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{r} = \int (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{G}) \cdot d\boldsymbol{S}, \tag{9.3.10}$$

где интеграл в правой части соотношения представляет собой поверхностный интеграл по любой поверхности, ограниченной замкнутой кривой Г.

Для случая гравитации аналогия может быть следующая: криволинейный интеграл представляет изменение вектора, когда мы перемещаем его, оставляя параллельным самому себе, вдоль замкнутой кривой Г. Такое общее изменение возможно связывается с интегралом по любой двумерной гиперповерхности, ограниченной кривой Г.

[1] Мы используем более распространенное обозначение в отечественной литературе для ротора ("rot"), а не "curl", как в лекциях Фейнмана (*Прим. перев.*)

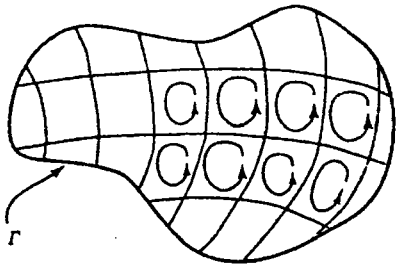

Рис. 9.4.

Доказательство такого утверждения может быть получено по аналогии с доказательством теоремы Стокса, в котором рассматривается разделение конечной поверхности инфинитезимальной сеткой, например, как показано на рис. 9.4; показывается, что сумма вкладов от любой инфинитезимальной сетки равна криволинейному интегралу. Когда рассматривается аналогия для этой ситуации в пространстве более высоких размерностей, то мы можем лучше понять значение тождества Бианки для описания сущности кривизны пространства.

9.4. Связь между кривизной и материей

Мы видели, как эффекты, связанные с действием гравитационных полей, могут быть описаны в рамках нашей геометрической интерпретации через тензор кривизны $R^{\mu}{}_{\nu\sigma\tau}$. Осталась только одна задача, состоящая в том, чтобы связать тензор кривизны с источниками гравитации, материи и энергии. Первое, что мы делаем для этого, мы производим свертку тензора кривизны по первому и последнему индексам и получаем тензор, который называется тензором Риччи

$$R_{\nu\sigma} = R^{\mu}{}_{\nu\sigma\mu}. \tag{9.4.1}$$

В этом соотношении указан единственный способ, каким можно свернуть один раз тензор кривизны. Следующий намек приходит из рассмотрения обобщенного закона сохранения энергии и импульса, который гласит, что свернутая ковариантная производная или, иначе говоря, ковариантная дивергенция тензора энергии-импульса, должна быть равна нулю.

Мы ищем вид соотношения, включающего в себя тензор Риччи таким образом, что его свернутая ковариантная производная является тождественным нулем. Ответ получается из свертывания дважды тождества Бианки (9.3.7). Свертывание по индексам $(\mu\beta)$ приводит к выражению, включающему в себя тензоры Риччи

$$R_{\sigma\alpha;\gamma} - R_{\sigma\gamma;\alpha} + R^{\mu}{}_{\sigma\gamma\alpha;\mu} = 0. \tag{9.4.2}$$

Свертывая по индексам (σ, α), мы получаем

$$R_{;\gamma} - R^{\sigma}{}_{\gamma;\sigma} - R^{\mu}{}_{\gamma;\mu} = 0. \tag{9.4.3}$$

Таким образом, тензорная величина, которая имеет нулевую ковариантную производную, есть

$$\left(R^{\mu}{}_{\gamma} - \frac{1}{2} g^{\mu}{}_{\gamma} R\right)_{;\mu} = 0. \tag{9.4.4}$$

Гипотеза Эйнштейна состояла в том, что эта величина в точности есть тензор энергии-импульса. Для того, чтобы записать это в эйнштейновской форме, мы просто поднимаем один индекс для того, чтобы записать дважды ковариантный тензор

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} &= R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \lambda^2 T^{\mu\nu}, \\ G^{\mu\nu}_{;\nu} &= 0. \end{aligned} \tag{9.4.5}$$

Первое уравнение (9.4.5) определяет полный закон гравитации Эйнштейна; т.е. это отправная точка всей нашей работы. $G^{\mu\nu}$ часто называется тензором Эйнштейна.

После того, как мы установили связь между тензором энергии-импульса и тензором кривизны, возникает интересный вопрос. Наша интуиция могла бы предполагать, что если повсюду в пространстве нет материи и давлений, геометрия должна бы быть плоской, описываемой метрикой Минковского специальной теории относительности. Тем не менее, оказалось возможным получить решения такие, что

$$T_{\mu\nu} = 0 \quad \text{всюду и, несмотря на это,} \quad R^{\sigma}{}_{\rho\tau\nu} \neq 0. \tag{9.4.6}$$

Наиболее интересным из таких решений является решение А.Тауба. Это решение наиболее интересно, поскольку оно не зависит от времени. Тем не менее, могут быть другие решения такой задачи, так мы можем спросить, можем ли мы иметь гравитацию без того, чтобы имелись источники?

Ответ на этот вопрос вероятно будет аналогичным ответу, который дается на аналогичный вопрос в электродинамике. Если разрешается зависимость от времени, то уравнения допускают существование полей без источников (т.е. движущиеся волны), до сих пор мы никогда не сталкивались с физическими трудностями, предполагая, что все наблюдаемое излучение действительно приходит от заряженных источников, которые и испускают это излучение. Можно

построить статические поля, например, имеющие потенциалы

$$\phi = x,$$
$$\phi = x^2 + y^2 - 2z^2, \tag{9.4.7}$$

которые являются бездивергентными, а потому не имеют источников. Обычная интерпретация таких решений состоит в том, что такие поля вызываются зарядами, лежащими вне некоторого объема, внутри которого соотношения (9.4.7) оказываются справедливыми, и для этого требуется все большее и большее количество заряда, находящегося вне рассматриваемой области для того, чтобы сделать такого рода решения приемлемыми, когда мы пытаемся увеличить объем, в котором выполнены приведенные выше решения.

Не проверяя в деталях решения А. Тауба, я полагаю, что он столкнулся с аналогичной ситуацией. Для того, чтобы объяснить наличие кривизны в отсутствии материи, мы должны взять предельный случай решений, которые имеют ясную физическую интерпретацию на малых областях, и затем разрешить этим областям стать бесконечно большими. Цена, которая при этом должна быть заплачена, состоит в том, чтобы неограниченно отсрочить объяснение растущего количества "внешней" материи, которая нам требуется.