

## Лекция 11

### 11.1. Кривизна в окрестности сферической звезды

Теперь мы обратим внимание на нахождение решений уравнений Эйнштейна для некоторых случаев, которые представляют физический интерес. Оказывается, что имеется очень небольшое число наблюдений, связанных с гравитацией, которые не могут быть адекватно объяснены ньютоновской теорией гравитации, и имеются только два решения уравнений Эйнштейна, которые пытались найти.<sup>1</sup> Одно из них есть решение, которое описывает гравитационное поле в окрестности звезды (которое должно точно определять отклонение луча света и прецессию орбиты Меркурия). Другое решение связано с описанием распределений массы, близких к однородным, и тем самым, это есть решение, которое представляет интерес при рассмотрении космологических моделей.

Если мы предполагаем наличие сферической симметрии, мы ожидаем, что метрический тензор будет давать в результате выражение возможно следующего вида для квадрата интервала собственного времени

$$(ds)^2 = A(dt)^2 + Bdr dt - C(dr)^2 - D((d\theta)^2 + \sin^2 \theta(d\phi)^2)r^2 \quad (11.1.1)$$

где символы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  обозначают функции, которые могут зависеть от координат  $(r, t)$ , но не от  $(\theta, \phi)$ . Такое решение допускает динамические решения, в которых движение материи является чисто радиальным.

Можно уменьшить число неизвестных функций, сделав разумный выбор новых координат. Например, заменим масштаб координаты  $r$  согласно следующему правилу:

$$r' = \sqrt{D(r, t)} r, \quad (11.1.2)$$

получившееся в результате выражение  $(ds)^2$  через  $r'$  и  $dr'$  вместо  $r$  и  $dr$  имеет тот же самый вид, но новая функция  $D$  есть в точности  $D = 1$ . Таким образом, функция  $D$  оказывается излишней, так как  $D = 1$  соответствует нашей задаче без потери общности.

<sup>1</sup> В настоящее время известно очень много точных решений уравнений Эйнштейна. Например, большое число точных решений можно найти в книге [КШМХ 82\*]. (Прим. перев.)

Второе преобразование делается путем замены масштаба времени. Мы положим

$$t' = t'(t, r). \quad (11.1.3)$$

Используя это преобразование, мы вводим новую функцию, которая может быть выбрана так, что коэффициент при произведении  $dt dt'$  равен нулю. Это означает, что если положить  $B = 0$ , то потери общности не происходит.

Обычно с этого места, чтобы продвинуться в вычислениях, принято работать не с функциями  $A$  и  $C$ , а с новыми функциями  $\nu$  и  $\lambda$ , которые определяются следующим образом:

$$A = e^\nu, \quad C = e^\lambda, \quad (11.1.4)$$

(в этих обозначениях мы следуем Шварцшильду). Метрический тензор является диагональным, и если мы выберем обозначения индексов  $(1, 2, 3, 4)$  для координат  $(r, \theta, \phi, t)$ , то компоненты метрического тензора являются следующими:

$$g_{44} = e^\nu, \quad g_{11} = -e^\lambda, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta. \quad (11.1.5)$$

Поскольку тензор является диагональным, элементы обратного тензора  $g^{\mu\nu}$  являются обратными элементами соответствующих компонентов  $g_{\mu\nu}$ ; более точно имеем следующие выражения:

$$g^{44} = e^{-\nu}, \quad g^{11} = -e^{-\lambda}, \quad g^{22} = -1/r^2, \quad g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (11.1.6)$$

Теперь может быть проведено вычисление элементов тензора кривизны. Эти вычисления напрямую приводят к цели, однако они скучны и утомительны, поскольку в символах Кристоффеля имеется достаточно много производных и должно быть вычислено довольно много сумм.

Когда все это проделано, то компоненты тензора кривизны могут быть вычислены через функции  $\nu$  и  $\lambda$  и их производные по отношению ко времени  $t$  и радиальной координате  $r$ . Для того, чтобы запись была более экономной, мы используем штрихи и точки для обозначения производных следующим образом:

$$\nu' = \frac{\partial \nu}{\partial r}, \quad \dot{\nu} = \frac{\partial \nu}{\partial t}, \quad \text{и т. д.} \quad (11.1.7)$$

и т.д. Точные выражения для тензора Римана являются следующими:

$$\begin{aligned} R^{42}{}_{41} &= -e^{-\lambda} \left( \frac{1}{2} \nu'' + \frac{1}{4} (\nu')^2 - \frac{1}{4} \lambda' \nu' \right) + e^{-\nu} \left( \frac{1}{2} \dot{\lambda} + \frac{1}{4} (\dot{\lambda})^2 - \frac{1}{4} \dot{\lambda} \dot{\nu} \right), \\ R^{42}{}_{42} = R^{43}{}_{43} &= -\frac{1}{2r} \nu' e^{-\lambda}, \quad R^{21}{}_{21} = R^{31}{}_{31} = \frac{1}{2r} \lambda' e^{-\lambda}, \\ R^{32}{}_{32} &= -\frac{1}{r^2} (e^{-\lambda} - 1), \quad R^{42}{}_{12} = R^{43}{}_{13} = -\frac{1}{2r} \dot{\lambda} e^{-\nu}. \end{aligned} \quad (11.1.8)$$

Все остальные компоненты равны нулю, за исключением тех, которые могут быть получены тривиальной перестановкой индексов некоторого элемента в соотношениях (11.1.8).

## 11.2. О связи между материей и кривизной

Именно тензоры, которые выводятся из тензора кривизны, связаны с тензором энергии-импульса. Комбинации, включающие в себя тензор кривизны и необходимые нам в дальнейшем, есть следующие

$$G^\mu{}_\nu = R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} g^\mu{}_\nu R. \quad (11.2.1)$$

Компоненты тензора  $G^\mu{}_\nu$  имеют довольно простые выражения через суммы элементов  $R^{\mu\nu}{}_{\sigma\tau}$ . Например, диагональные элементы есть

$$\begin{aligned} G^4{}_4 &= R^{12}{}_{12} + R^{13}{}_{13} + R^{23}{}_{23}, \\ G^1{}_1 &= R^{42}{}_{42} + R^{43}{}_{43} + R^{32}{}_{32}. \end{aligned} \quad (11.2.2)$$

Другими словами, каждый из этих компонентов включает в себя сумму по таким элементам  $R^{\mu\nu}{}_{\sigma\tau}$ , в индексы которых не включен диагональный индекс. Для недиагональных элементов мы также получаем очень простые выражения. Например,

$$G^4{}_1 = R^{24}{}_{12} + R^{34}{}_{13}, \quad G^2{}_1 = R^{32}{}_{13} + R^{42}{}_{14}, \quad (11.2.3)$$

и по аналогии с этими компонентами мы можем легко записать соответствующие выражения для других компонентов.

Простота выражений рассмотренных сумм может навести нас на мысль об интерпретации кривизны через характеристики распределения вещества. Мы ранее обсудили кривизну двумерной поверхности через относительное изменение длины окружности или площади круга по отношению к их величинам в плоском пространстве через измеренную величину их радиуса:

$$\text{Длина окружности} = 2\pi r(1 - K \times \text{площадь}), \quad (11.2.4)$$

где  $K$  – коэффициент. Для трехмерного мира изменение длины окружностей зависит от плоскости, на которой рисуются круги, о которых идет речь, но можно определить среднюю кривизну посредством измерения отличия от  $4\pi r^2$  площади сферы радиуса  $r$ . Получаемый результат должен быть следующим

$$\text{площадь} = 4\pi r^2 \left( 1 + \frac{1}{9} r^2 R \right), \quad (11.2.5)$$

где  $R$  – скаляр, получаемый двойной сверткой тензора кривизны.

Связь этой идеи с теорией гравитации может быть получена, если мы попытаемся придать концептуальное значение сумме  $R^{12}{}_{12} + R^{23}{}_{23} + R^{13}{}_{13}$ , что есть компонент тензора  $G^4{}_4$ , который равен компоненту 44 тензора энергии-импульса.

Эта сумма есть в точности то, что мы должны называть средней кривизной трехмерного пространства, которое перпендикулярно оси времени. Таким образом, мы можем дать словесную интерпретацию теории гравитации следующим образом: рассмотрим небольшую трехмерную сферу с заданной площадью поверхности. Ее действительный радиус превышает радиус, вычисляемый в евклидовой геометрии ( $\sqrt{\text{площадь}/4\pi}$ ), на величину, которая пропорциональна количеству вещества внутри этой сферы ( $r - \sqrt{\text{площадь}/4\pi} = G/3c^2 m_{\text{внутри}}$ ) (один ферми на 4 миллиарда метрических тонн).

Эта интерпретация используется прямо для компонента 44, который есть плотность вещества (или энергии) для вещества внутри этой сферы. Другие компоненты тензора кривизны правильно выводятся, когда мы требуем, чтобы один и тот же результат получался в любой координатной системе независимо от ее скорости.

### 11.3. Метрика Шварцшильда, поле вне сферической звезды

Выражения для компонентов тензора  $G^\mu_\nu$ , через функции  $\nu$  и  $\lambda$  являются следующими

$$\begin{aligned} G^4{}_4 &= \frac{1}{r} \lambda' e^{-\lambda} - \frac{1}{r^2} (e^{-\lambda} - 1) = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r (e^{-\lambda} - 1)), \\ G^1{}_1 &= -\frac{1}{r} \nu' e^{-\lambda} - \frac{1}{r^2} (e^{-\lambda} - 1), \\ G^4{}_1 &= \frac{1}{r} \dot{\lambda} e^{-\nu}, \quad G^1{}_4 = -\frac{1}{r} \dot{\lambda} e^{-\lambda}, \\ G^2{}_2 &= \frac{e^{-\lambda}}{2r} (\lambda' - \nu') - \frac{e^{-\lambda}}{4} (2\nu'' + (\nu')^2 - \lambda' \nu') + \frac{e^{-\nu}}{4} (2\ddot{\lambda} + (\dot{\lambda})^2 - \dot{\lambda} \dot{\nu}). \end{aligned} \quad (11.3.1)$$

Только выражение для компонента  $G^2{}_2$  является громоздким, но так происходит, что его точное выражение редко бывает необходимо ис-

пользоваться. Важное положение состоит в том, что дивергенция этого тензора должна быть равна нулю. Если мы имеем выражение для других компонентов, то требование обращения в нуль дивергенции часто помогает избежать использования точного выражения для  $G^2_{\ 2}$ .

В этом месте могут быть предложены следующие упражнения.

- 1) Доказать, что если нет материи внутри сферы радиуса  $b$  и распределение материи вне этой сферы является сферически симметричным, то пространство внутри сферы – плоское с метрикой  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ .
- 2) Доказать, что если тензор энергии-импульса  $T^{\mu\nu}$  известен всюду внутри сферы радиуса  $b$ , то каким бы он ни был вне этой сферы, это не влияет на физику внутри сферы радиуса  $b$ . (Предполагается, что вне этой сферы тензор энергии-импульса характеризуется сферически симметричным распределением.)

Решение вне сферически симметричного распределения массы получается, если мы положим  $T_{\mu\nu} = 0 = G_{\mu\nu}$  и решим получившиеся дифференциальные уравнения.

Мы начнем с того, что заметим, что  $G^4_{\ 4}$  зависит только от  $\lambda$ . Так как  $G^4_{\ 4}$  равен нулю, то мы получаем

$$r(e^{-\lambda} - 1) = \text{constant} = -2m. \quad (11.3.2)$$

Множитель 2 взят для удобства, так что постоянная величина  $m$  есть полная масса звезды, умноженная на ньютоновскую гравитационную постоянную. Если внутри сферы радиуса  $a$ , где находится вся масса, нет особенностей, то постоянная должна быть равна

$$\int_0^a dr r^2 G^4_{\ 4} = 2m. \quad (11.3.3)$$

Мы уверены, что зависимость от времени отсутствует, поскольку

$$G^1_{\ 4} = 0 = -\frac{1}{r} \dot{\lambda} e^\lambda,$$

так что  $\lambda$  вообще не зависит от времени. Последняя задача состоит в том, чтобы получить выражение для  $\nu$ . Мы делаем это, приравнивая  $G^1_{\ 1}$  и  $G^4_{\ 4}$ , так как обе эти величины равны нулю. Отсюда приходим к выводу, что

$$\nu' = -\lambda', \quad (11.3.4)$$

которое может происходить только в том случае, если функция  $\nu$  имеет следующий вид:

$$\nu = -\lambda + f(t), \quad (11.3.5)$$

где  $f(t)$  – произвольная функция времени. Тем не менее, так как функция  $\nu$  появляется в коэффициенте при величине  $(dt)^2$  в метрике следующим образом:

$$e^\nu (dt)^2 = e^{-\lambda} e^{f(t)} (dt)^2,$$

мы можем исключить множитель  $\exp(f(t))$ , изменяя масштаб временной координаты. Другие элементы метрического тензора не изменяются при такой замене, так как в них включена только функция  $\lambda(r)$ . Полученный результат известен как метрика Шварцшильда

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (dt)^2 - \frac{(dr)^2}{1 - 2m/r} - r^2 (\sin^2 \theta (d\phi)^2 + (d\theta)^2). \quad (11.3.6)$$

Интересно, что полученная метрика не зависит от времени, хотя мы никогда не говорили о том, что мы ищем статическое решение. Отсутствие зависимости от времени метрики Шварцшильда следует из предположения о сферической симметрии и того, что мы рассматриваем метрику в области с нулевой плотностью давления.

Для случая реальной звезды такой, как Солнце, точной сферической симметрии нет, поскольку имеется вращение и поскольку имеется утолщение (балдж) на экваторе. Тем не менее, эти отличия вызывают лишь небольшие отклонения от случая сферической симметрии. Если имеется световой поток от звезды, то будут появляться другие поправки, поскольку плотность энергии не будет равной нулю в пространстве вне звезды. Тем не менее, решение Шварцшильда достаточно точно описывает ситуацию с Солнцем, так что прецессия перигелия Меркурия задается правильно в пределах ошибок измерений.

#### 11.4. Сингулярность Шварцшильда

Метрика, представленная в соотношении (11.3.6), имеет особенность при  $r = 2m$ . Для того, чтобы узнать, является ли эта особенность, причиняющей беспокойство и имеющей физический смысл, мы должны посмотреть, соответствует ли эта особенность физическому значению измеряемого радиуса от начала координат (что не есть то же самое, что наша координата  $r$ )

$$R = f(r). \quad (11.4.1)$$

Мы получаем ответ, рассматривая эту метрику с использованием другого подхода. Мы могли бы предположить, что правильное описание сферически симметричной метрики должно было бы иметь следующий вид:

$$(ds)^2 = H(R)(dt)^2 - F(R) ((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2), \quad (11.4.2)$$

где  $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Метрика Шварцшильда приводится к такому виду путем подстановки

$$r = R + \frac{m^2}{4R} + m, \quad (11.4.3)$$

используя которую, получаем следующее выражение

$$(ds)^2 = \frac{\left(1 - \frac{m}{2R}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2R}\right)^2} (dt)^2 - \left(1 + \frac{m}{2R}\right)^4 ((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2). \quad (11.4.4)$$

Особенность в интервале собственного времени исчезла. Мы видим, что это было следствием особенности в определении радиальной координаты  $r$ . Тем не менее, метрика (11.4.4) выделяет частное значение радиуса  $R = m/2$  как положение, в котором обращается в нуль коэффициент при  $(dt)^2$ . Нам еще следует исследовать, что происходит с физическими процессами в этой точке.

Эти результаты не нуждаются ни в каком непосредственном наблюдательном следствии. Когда мы подставляем величины, соответствующие массе Солнца, мы находим, что такой критический радиус существовал бы, если бы масса Солнца была сосредоточена внутри сферы, имеющей радиус, равный всего 1.5 км. Тем не менее, хотя очевидно эта ситуация не будет иметь место в Солнечной системе, разумно исследовать это критическое значение радиуса как свойство нашей теории.

Физическая интерпретация этого особого значения радиальной координаты связана со скоростью, на которой процессы, происходящие вблизи Солнца, проявлялись бы для удаленных наблюдателей. Ранее мы вычислили, как свет из областей с более низким гравитационным потенциалом сдвигается вниз по частоте, так что все объекты выглядят краснее. Радиус  $R = m/2$  соответствует потенциальному, который настолько низок, что свет не был бы достаточно энергичен для того, чтобы покинуть звезду, так что никакой свет не достиг бы наблюдателя, который находится на большом расстоянии от звезды.

Мы можем увидеть, происходит ли что-либо катастрофическое с геометрией пространства в этой точке, в частности вычисляя компоненты тензора кривизны. Получено, что эти компоненты равны

$$\begin{aligned} R^{12}{}_{12} &= R^{13}{}_{13} = -m/r^3, & R^{23}{}_{23} &= 2m/r^3, \\ R^{42}{}_{42} &= R^{43}{}_{43} = -m/r^3, & R^{41}{}_{41} &= 2m/r^3. \end{aligned} \quad (11.4.5)$$

Мы видим, что пространство в этой критической точке – гладкое. Такая "особенность" не может быть ничем иным как результатом частного способа выбора координат. В нашем примере с жуком, ползающим по поверхности сферы, была особенность в описании сферы при пересечении экватора. Но конечно, в физическом смысле (предполагается, что) пространство является в точности таким же гладким в окрестности этой особенности, как всюду на действительной сфере.

Результат, который мы только что получили, что кривизна пропорциональна  $1/r^3$ , выглядит настолько просто, что мы можем попробовать поискать простой способ получения этого результата. У меня всегда было ощущение, что простой результат следовало бы получать простым способом. Следовательно, мы будем рассматривать геометрическую аргументацию, которая воспроизведет зависимость  $1/r^3$  для рассматриваемого случая. Нам снова понадобится понятие средней кривизны в трехмерном пространстве, определяемого путем рассмотрения четырехмерного пространства для фиксированного момента времени. В этом подпространстве компоненты кривизны аналогичны компонентам давления. Для давлений (или угловых моментов) кривизна определяет нечто в плоскости, и мы можем пометить компоненты или парами индексов, которые определяют плоскость, или индексом оси, перпендикулярной плоскости. Таким образом, у нас есть следующее отождествление

$$R^{12}{}_{12} \rightarrow P^3{}_3, \quad R^{13}{}_{13} \rightarrow P^2{}_2, \quad (11.4.6)$$

и т.д. Далее мы покажем, что требование, что дивергенция таких "давлений" обращается в нуль, эквивалентно тождеству Бианки;

$$P^3{}_{3;3} + P^3{}_{1;1} + P^3{}_{2;2} = 0, \quad (11.4.7)$$

которое означает, что в этом пространстве (о котором идет речь), такое "давление" приводит к нулевой результирующей силе. Верхние индексы соответствуют плоскости, в которой рассматриваются компоненты кривизны.

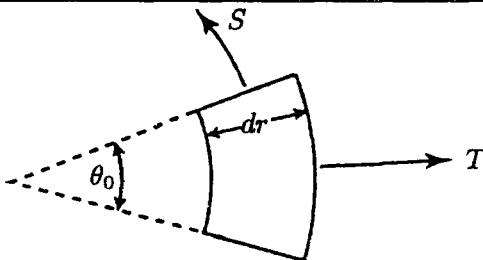


Рис. 11.1.

Когда мы имеем дело с давлениями, след тензора давления есть давление. В нашем случае след нашего давления есть средняя кривизна, которая в свою очередь есть плотность вещества. Мы получаем зависимость от  $1/r^3$ , требуя в полярных координатах, чтобы физическое равновесие было бы в месте, где давление равно нулю. Мы должны быть внимательны в определении площадей поперек направлений действия давлений, поскольку это должны быть физические площади, измеряемые вдоль геодезических. Мы определяем расстояние вдоль дуги при постоянном значении  $r$  как  $\theta_0 r$ , где  $\theta_0$  – небольшой угол. Измерение величины  $\theta_0$  хорошо определено, так как если мы обходим окружность один раз, то называем полный угол  $2\pi$ . Если радиальное давление обозначим буквой  $T$ , а давление в перпендикулярном направлении как  $S$  (см. рис. 11.1), мы имеем для элемента объема  $r^2 dr \theta(\sin(\theta) d\phi)$ , для которого  $\theta_0 = \sin(\theta) d\phi$ , что эти силы оказываются неуравновешенными, если не выполнены следующие условия

$$d(T r^2 \theta_0^2) = 2S r \theta_0^2 dr.$$

Если для величины  $T$  допускается зависимость только от  $r$ , мы получаем следующее дифференциальное уравнение, связывающее величины  $T$  и  $R$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{2S}{r} - \frac{2T}{r}, \quad (11.4.8)$$

которое выполняется в общем случае. Теперь мы можем рассмотреть ситуацию в пустом пространстве, в котором след тензора равен нулю

$$\text{След} = T + 2S = 0, \quad T = -2S. \quad (11.4.9)$$

Дифференциальное уравнение в этом случае имеет вид:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3T}{r}, \quad (11.4.10)$$

отсюда получаем решение  $T = 1/r^3$ .

Двигаясь таким путем, мы видим, почему выполнение тождества Бианки означает, что компоненты кривизны всюду пропорциональны  $1/r^3$ . Связь функции  $\exp(-\lambda)$  с величиной  $T$  может быть получена с использованием аналогичных простых рассмотрений, которые приводят к заключению, что  $\exp(-\lambda)$  отличается от 1 на множитель, обратно пропорциональный  $r^3$  (11.4.5).

### 11.5. Размышления о понятии кротовой норы

Рассуждения, приведенные в предыдущем разделе, показали нам, как сферически симметричное распределение массы в достаточно небольшом объеме приводит к возникновению компонентов тензора кривизны, пропорциональных всюду  $m/r^3$ . Двумерный аналог такой ситуации мог бы быть использован жуком, ползающим по поверхности, имеющей форму "водоворота". Давайте представим кривую, врачающуюся вокруг оси  $z$ , причем эта кривая пересекает ось  $xy$  под прямыми углами, как показано на рис. 11.5. Такая поверхность может представлять наше пространство при заданном моменте времени ( $dt = 0$ ) и при определенном значении азимутального угла, скажем  $\phi = 0$ . Если уравнение поверхности задается функцией  $z(r)$ , то длина дуги при постоянном значении  $\theta$  задается следующим соотношением:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 (dr)^2 = \left[ 1 + \left( \frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 \right] (dr)^2. \quad (11.5.1)$$

Мы можем положить множитель перед величиной  $(dr)^2$  равным соответствующей величине в метрике Шварцшильда

$$1 + \left( \frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 = \frac{1}{1 - 2m/r} \quad (11.5.2)$$

и определить отсюда функцию  $z(r)$ . Можно легко получить ответ в этом случае

$$z^2(r) = 8m(r - 2m). \quad (11.5.3)$$

Другими словами, пространство – параболическое, "горловина" которого расположена на расстоянии  $r = 2m$  от начала координат.

Существуют некоторые в высшей степени соблазнительные аспекты этого результата. В области  $r > 2m$  пространство в точности такое, которое могло бы описываться как результат, вызываемый действием массы  $m$ , находящейся в начале координат (или более точно, масса распределена сферически симметрично в малой окрестности

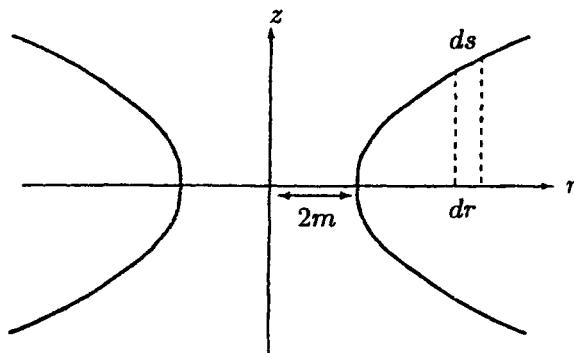


Рис. 11.2.

начала координат). Если мы приближаемся к началу координат, мы никогда не можем достичь расстояния  $r < 2m$ , но можем перейти в пространству, которое есть двойник тому пространству, в котором мы исходно находились. Это рассмотрение приводит к идее (разработанной, в частности, Уилером), что эффекты, которые мы называли "массовыми", могут быть ничем иным, как особенностью топологии пространства, в котором мы находимся, и что нигде нет "истинных" источников гравитации.

Любопытно было бы предположить, что все частицы с массой должны иметь такие горловины радиуса  $2m$ , ассоциированные с ними, и может оказаться так, что элементарные частицы есть ничто иное, как области пространства, через которые мы можем перейти в другое пространство, протискиваясь через дыру. Эти дыры называются Дж.А. Уилером "кротовыми норами". Если частицы заряжены, силовые линии электрического поля могут быть непрерывны вдоль этой поверхности, входя на одной стороне кротовой норы и выходя на другой стороне, так что существование двойного пространства может быть связано с существованием пар частица – античастица.

Пока оказалось невозможным получить согласованную качественную картину элементарных частиц, как такие кротовые норы. Вероятно, нет никакого возможного экспериментального наблюдения такого бы то ни было эффекта, обусловленного существованием кротовых нор. Мы не знаем никаких звезд, которые достигали бы такой плотности массы, необходимой для того, чтобы критический радиус был близок к действительному радиусу. Если бы существовала звезда с радиусом меньшим, чем их критическое значение, мы не могли бы увидеть эту звезду, поскольку свет не может покинуть эту поверхность, так что до сих пор считается, что такие объекты могут существовать. Все известные элементарные частицы имеют из-

вестную структуру, много большую, чем диаметр, ассоциированной с этой частицей кротовой норы. Например, для нейтрона мы имеем  $r = 2m \approx 10^{-33}$  см, примерно в  $10^{20}$  меньше, чем известный радиус нейтрона. Можно было бы взять частицу с массой  $10^{-5}$  грамм, чтобы диаметр кротовой норы был бы той же величины, что и комптоновская длина волны  $\hbar/mc$ .

**11.6. Проблемы теоретических исследований кротовых нор**

Имеются различные вопросы, которые могут быть заданы, и эти вопросы образуют основу для теоретических исследований. Эти проблемы стоило бы исследовать, поскольку они имеют очень большое значение. Прежде всего, мы можем, используя наше нынешнее знание о поведении материи, спросить, возможно ли, чтобы достаточно большая масса оказывалась в достаточно малом объеме и коллапсировала в область, радиус которой меньше критического радиуса? Предположим, что в качестве начальной конфигурации имелась пыль, распределенная практически однородно по достаточно большой области пространства. В этой конфигурации начался бы гравитационный коллапс, вещества стало бы нагреваться, начались бы сначала химические, а затем ядерные реакции. Когда масса оказывается в достаточно большой степени сжата, то имелась бы точка, в которой электроны производили бы гигантское давление, препятствующее сжатию, так как они не могут быть сжаты вместе ближе, чем это допустимо принципом запрета (принципом Паули). Но для достаточно больших масс гравитационное притяжение является достаточно сильным для того, чтобы выдавить электроны и позволить нуклонам сохранять сжатие.

Детально процесс такого сжатия все еще не исследован теоретически. Мне кажется, что перед тем, как мы что-либо узнаем о наших кротовых норах, нам необходимо решить задачи классической теории гравитации, в которых анализируется поведение очень больших масс. Если коллапс некоторого объекта внутрь сферы с радиусом меньшим, чем критическое значение, возможен, то мы никогда не увидим, находясь вне этой сферы, этот объект, поскольку свет (предполагаем, что он излучает в оптическом диапазоне) становится все краснее и краснее, затем становится инфракрасным, затем излучаемым в радиодиапазоне, и наконец, обнаруживается только по непосредственной связи с ним (по его гравитационному полю). Существует физический смысл в вопросе о том, каким он будет, став частью коллапсирующей массы.

Давайте посмотрим, как мы могли бы взяться за описание физических процессов, происходящих в относительной системе отсчета, движущейся с падающей материей. Уравнение состояния включало

бы в себя давление  $p$  и плотность вещества  $\rho$ . В статическом случае мы бы имели

$$T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = -p, \quad T^4_4 = \rho. \quad (11.6.1)$$

Как выглядит этот тензор для движущегося элемента материи? Используя величины

$$u = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad w = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \rho_0 = \rho + p, \quad (11.6.2)$$

мы находим, что

$$\begin{aligned} T^4_4 &= \rho_0 w^2 + p, & T^1_1 &= -\rho_0 u^2 - p, \\ T^2_2 &= T^3_3 = -p, & T^4_1 &= -\rho_0 uw. \end{aligned} \quad (11.6.3)$$

Для того, чтобы решить задачу о сжатии пылевого облака, мы можем действовать следующим образом. Сначала мы предполагаем, что ситуация описывается функциями  $\lambda$  и  $\nu$ , зависящими от радиальной координаты и времени. Мы предполагаем, что состояние материи описывается плотностью вещества  $\rho$  и давлением  $p$ . Нам необходимо также уравнение состояния, связывающее  $p$  и  $\rho$ :

$$p = f(\rho). \quad (11.6.4)$$

В качестве первой попытки мы можем посмотреть, что происходит, если давление  $p$  и плотность  $\rho$  связаны адиабатическим законом. Позднее мы можем посмотреть, что происходит, если мы предполагаем охлаждение, как следствие светового излучения, нагрев ядерными реакциями и т.д. В результате мы хотим получить функцию, описывающую радиальную скорость элемента вещества —  $u(r, t)$ .

Задача, в которую мы включили рассмотрение тепловых потоков и непрозрачности, и много другой всячины, не должна быть слишком переусложненной, так что ответ должен быть получаем как решение системы уравнений с частными производными. Надежда в том, что эта система будет согласованной и соответствующие зависимости могут быть распутаны, так что уравнения могли бы быть решены в соответствии с некоторой процедурой. Было бы слишком хорошо надеяться на то, что решения могут быть получены в замкнутом виде. Тем не менее, если дифференциальные уравнения распутываются, мы могли бы надеяться, что компьютеры могли бы обеспечить нас численными решениями этой системы дифференциальных уравнений.