

## Лекция 14

### 14.1. Проблема сверхзвезд в общей теории относительности

В этой лекции я хочу обсудить решение проблемы сверхзвезд, в которых имеется вещества с массой примерно  $10^9$  солнечных масс, что обсуждали в своей работе Фаулер и Уилер [HoFo 63]. Мы берем модель, которая очень проста, но может, тем не менее, обладать огромным множеством атрибутов реальных процессов. После того, как мы поймем, как обходиться с решением такой простой задачи, мы можем позаботиться об усовершенствованиях в модели. Начальный пункт нашего анализа – это дифференциальное уравнение общей теории относительности, уравнение Эйнштейна

$$8\pi G T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (14.1.1)$$

Правая часть этого уравнения есть "геометрическая" часть, здесь мы подставляем выражения для кривизны через компоненты метрического тензора. Если мы предполагаем статические, сферически симметричные решения, тогда элементы метрического тензора в точности определяются функциями  $\nu(r)$  и  $\lambda(r)$  такими, что

$$(ds)^2 = e^\nu (dt)^2 - e^\lambda (dr)^2 - r^2 (\sin^2 \theta (d\phi)^2 + (d\theta)^2). \quad (14.1.2)$$

Левая часть уравнения (14.1.1) есть физическая часть, которая включает в себя тензор энергии-импульса. Если мы предполагаем, что вещество газообразное, этот тензор включает в себя только давление  $p$  и плотность  $\rho$  в любой точке. При обозначении координат  $(r, \theta, \phi, t)$  индексами в порядке  $(1,2,3,4)$  и производных по отношению к координате  $r$  штрихами, уравнение Эйнштейна сводится к следующей системе уравнений, выраженных на языке функций  $\nu(r)$ ,  $\lambda(r)$  и давления, и плотности:

$$G^1{}_1 = -e^{-\lambda} \nu' / r - (e^{-\lambda} - 1) / r^2 = -8\pi G p, \quad (14.1.3a)$$

$$G^2{}_2 = -e^{-\lambda} (\nu''/2 - \nu' \lambda'/4 + (\nu')^2/4 + (\nu' - \lambda')/2r) = -8\pi G p, \quad (14.1.3b)$$

$$G^4{}_4 = -e^{-\lambda} \lambda' / r - (e^{-\lambda} - 1) / r^2 = 8\pi G \rho. \quad (14.1.3c)$$

Модель, которую мы будем использовать, будет задаваться теми выражениями, которые мы подставим для давления  $p$  и плотности  $\rho$ . Эти величины представляют давление и плотность, которые могли бы быть действительно измерены наблюдателем, стоящим в какой-либо выделенной точке. Мы не получим правильных решений до тех пор, пока мы не проследим за тем, чтобы наш физический тензор  $T_{\mu\nu}$  удовлетворял законам сохранения.

Для нашего случая сферической симметрии только радиальная компонента дивергенции тензора имеет значение; мы должны иметь

$$\frac{\partial T^1_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \nu' (T^1_1 - T^4_4) + \frac{1}{r} (T^1_1 - T^2_2) = 0 = -\frac{1}{2} \nu' (p + \rho) - p', \quad (14.1.4)$$

что по сути дела утверждает то, что давления в радиальном направлении уравновешены, как это и должно быть в нашем статическом решении. Это уравнение (равенства нулю дивергенции) служит тому, чтобы исключить  $\nu'$ . Далее мы получаем соотношение для того, чтобы исключить  $\exp(-\lambda)$ . Сначала мы перепишем  $T^4_4$  через новую функцию  $M(r)$ , как показано в следующих соотношениях

$$T^4_4 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-\lambda})]. \quad (14.1.5a)$$

Если мы положим

$$M(r) = \frac{1}{2} [r(1 - e^{-\lambda})], \quad e^{-\lambda} = 1 - \frac{2M(r)}{r}, \quad (14.1.5b)$$

тогда

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 G\rho. \quad (14.1.5b)$$

Оказывается, что функция  $M(r)$  пропорциональна массе звезды, так как это есть интеграл плотности  $\rho$ . Тем не менее, интерпретация не является настолько прямой, поскольку имеются особенности координат, через которые измеряется функция  $\rho$ . Мы обсудим это ниже. Подставляя выражения для  $\nu'$  и  $\exp(-\lambda)$  в уравнение (14.1.3а), получаем

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} = -(p + \rho) \left(4\pi G p + \frac{M}{r^3}\right). \quad (14.1.6)$$

Вместе с дифференциальным уравнением для  $M(r)$  и с уравнением состояния, связывающим величины  $p$  и  $\rho$ , мы имеем систему связанных уравнений, которые могут быть в принципе разрешены для функций  $M(r)$ ,  $p$  и  $\rho$ ; с подходящими граничными условиями они могли бы описывать сверхзвезду в приближении статического решения.

Какого рода уравнение состояния мы возьмем? Масса, образованная из  $10^9$  солнечных масс, является очень сильно разреженной, будучи размазанной по области с галактическими размерами; даже при температуре несколько единиц  $10^9$  градусов Кельвина, газовое давление является довольно низким. Тем не менее, оказывается, что плотность излучения, которая пропорционально  $T^4$ , дает существенную часть энергии массы покоя нуклонной плотности. Мы получаем осмысленное приближение, пренебрегая газовым давлением по сравнению с давлением излучения; в том же

самом духе, мы пренебрегаем небольшим увеличением массы нуклона, вызываемым их скоростями. В единицах энергии массы покоя нуклона мы имеем тогда, если  $s$  – плотность нуклонов, что

$$\rho = s + \epsilon, \quad (14.1.7a)$$

$$p = \frac{1}{3}\epsilon. \quad (14.1.7b)$$

Эти уравнения связывают  $p$  и  $\rho$ , но мы все еще нуждаемся в том, чтобы в точности определить  $\epsilon$  для того, чтобы иметь уравнение состояния. Мы делаем адиабатическое приближение, которое делает каждый, пытающийся иметь дело с такими проблемами, такое, что распределение температуры является тем же самым, как будто это есть величина, которая падает вместе с первоначально однородным распределением без всякого перемешивания или переноса энергии между различными областями. Если мы сжимаем вещество внутри ящика, все частоты вырастают на один и тот же множитель, обратно пропорциональный длине ящика. Так как энтропия является постоянной для адиабатического процесса, то температура должна увеличиваться таким же образом. Таким образом, плотность нуклонов пропорциональна кубу температуры, и плотность энергии излучения пропорциональна  $T^4$ . На языке температуры, измеренной в единицах  $10^9$  градусов, и энергии, в единицах массы покоя нуклона, имеем

$$\epsilon = aT^4, \quad s = a\tau T^3. \quad (14.1.8)$$

Величина  $a m_n$ , где  $m_n$  есть масса нуклона, есть константа, имеющая значение  $8.4 \text{ г}/\text{см}^3$ ;  $\tau$  – параметр, связанный с не зависящей от радиуса энтропией на барион соотношением (энтропия на барийон)  $= 4/(3\tau)$ . Эти результаты могут быть выведены также из общего условия для адиабатического сжатия, которое может быть выражено как

$$s^2 \frac{d(\epsilon/s)}{ds} = p = \frac{\epsilon}{3}. \quad (14.1.9)$$

Эти соотношения между давлением, плотностью и адиабатическими процессами получены в связи со звездными задачами в классическом случае. Звезды, в которых и давление, и плотность следуют степенным зависимостям от температуры всюду, известны как политропы.

На языке новой температуры  $t = T/\tau$  и новых единиц таких, что  $8\pi G m_n a t^4 = 1$ , система уравнений принимает следующий вид:

$$\rho = a t^4 [t^4 + t^3], \quad (14.1.10a)$$

$$p = a t^4 \left[ \frac{1}{3} t^4 \right], \quad (14.1.10b)$$

$$\frac{dm}{dr} = \frac{1}{2} [t^4 + t^3] r^2, \quad (14.1.10\text{в})$$

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{r}{2} \left( \frac{3}{4} + t \right) \left( \frac{1}{3} t^4 + \frac{2m}{r^3} \right) \Big/ \left( 1 - \frac{2m}{r} \right). \quad (14.1.10\text{г})$$

Какие же условия мы выбираем в качестве граничных? Мы предполагаем определенную температуру в центре и то, что поверхность является многое холоднее, по существу температура равна нулю по сравнению с температурой в центре звезды. Входные величины для нахождения решений  $t(r)$  и  $m(r)$  попросту являются следующими:

$$m = 0, \quad t = t_c, \quad \text{при } r = 0. \quad (14.1.11)$$

Эта задача сформулирована таким способом, что численное решение такой задачи получается очень легко. Мы начинаем решение от центра, где мы знаем, что  $m(r) = 0$  и  $t(r) = t_c$ ; мы вычисляем  $(dm/dr)$  из соотношения (14.1.10в), и вычисляем  $(dt/dr)$  из соотношения (14.1.10г), и затем прыгаем вперед и назад между этими уравнениями для того, чтобы получить функции  $m(r)$  и  $t(r)$ . Так как производная  $(dt/dr)$  будет всегда отрицательна при положительном  $t$ , то в некоторой точке  $r_0$ ,  $t$  обращается в нуль. Мы останавливаем решение в этой точке и предполагаем, что более физическое решение изменило бы только наиболее внешние слои звезды для того, чтобы сделать его убывающим более гладко по направлению к нулевой плотности, без изменения решения во внутренней части области какого угодно большого размера. Таким образом, предполагается, что радиус  $r_0$  – есть радиус звезды, а величина  $m_0 = m(r_0)$  – полная масса звезды.

#### 14.2. Значение решений и их параметры

Решение, которое мы описали, оказывается справедливым для многих типов звезд, таким образом, звезды описываются всевозможными значениями параметра  $\tau$ . Для того, чтобы дать идею определения величин  $m_0$  и  $r_0$  для интересующих нас случаев, мы даем коэффициенты перевода к более обычным единицам:

$$M \equiv \text{Масса звезды} = (27 \times 10^6 \text{ солнечная масса}) 2m_0/\tau^2, \quad (14.2.1\text{а})$$

$$R \equiv \text{Радиус звезды} = (8 \times 10^{12}) r_0/\tau^2, \quad (14.2.1\text{б})$$

$$T_c \equiv \text{Температура в центре звезды} = t_c \tau (10^9 \text{ градусов}), \quad (14.2.1\text{в})$$

$$M_{\text{rest}} \equiv \text{Масса нуклонов звезды}$$

$$= (27 \times 10^6 \text{ солнечная масса}) 2N/\tau^2. \quad (14.2.1\text{г})$$

Существуют различные способы, пользуясь которыми мы можем увидеть, что наши уравнения описывают то, что наша интуиция одобряет. Например, для случая, когда масса  $m(r)$  никогда не становится слишком большой, давление меняется в зависимости от радиуса в соответствии с ньютоновским правилом:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{m(r)}{r^2} \rho. \quad (14.2.2)$$

Интересный момент связан с полным числом нуклонов. Хотя мы могли бы иметь искушение записать попросту  $4\pi \int dr s r^2$ , нам бы следовало вспомнить и написать соответствующие инвариантные выражения. Правильное выражение есть

$$N = \int_0^{r_0} s^4 \sqrt{-g} dr d\theta d\phi, \quad \sqrt{-g} = e^{\nu/2} e^{\lambda/2} r^2 \sin \theta, \quad (14.2.3)$$

где  $s^4$  есть временной компонент четырех-вектора  $s^\mu$ . Мы можем вычислить эту величину и провести интегрирование в системе, в которой нуклоны находятся в покое, в этой системе только временной компонент оказывается не равным нулю, так что мы приходим к выводу о том, что

$$s^\mu s_\mu = (s)^2 = g_{44} s^4 s^4, \quad s^4 = s e^{-\nu/2}. \quad (14.2.4)$$

Итак, имеем следующий результат для полного числа нуклонов

$$N = 4\pi \int_0^{r_0} dr s r^2 [1 - 2m/r]^{-1/2}. \quad (14.2.5)$$

Давайте вновь посмотрим на выражение для массы звезды и попытаемся понять его более полным образом. Плотность  $\rho$  есть сумма двух членов, энергии, соответствующей массе покоя  $s$ , и энергии излучения  $\epsilon$ . Когда мы выписываем явно массу как интеграл по правильным образом выбранным инвариантным элементам, мы видим, что плотность  $\rho$  умножается на некоторую величину, из которой вычисляется квадратный корень,

$$m \leq m_0 = 4\pi \int_0^{r_0} \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - 2m/r}} \rho \sqrt{1 - 2m/r}. \quad (14.2.6)$$

Это в точности тот результат, который мы могли бы ожидать из релятивистской теории, множитель с квадратным корнем вносит поправку, учитывающую изменение плотности энергии, обусловленное влиянием гравитационной энергии.

Когда мы берем температуру выше, чем  $10^9$  градусов, мы должны осторожаться попыток использования таких решений, поскольку новые физические процессы, которые имеют место при столь высоких температурах, могут сделать наше уравнение состояния полностью неадекватным. Например, если нейтринные пары могут рождаться при электрон-электронных

Таблица 14.1.

$t_c$	$r_0$	$2m_0$	$2 N$
0.01	1100	8.45	8.45
0.10	114	6.23	6.19
0.20	59	4.71	4.62
0.40	36	3.13	2.97
0.60	28	2.39	2.19
1.00	32	1.87	1.66

столкновениях, они могут уносить большое количество энергии, так что наши приближения могут быть полностью несправедливыми. Может оказаться, что такие процессы будут важны при температуре  $10^9$  градусов, температуре, которая достаточно велика для того, чтобы существенная часть частиц имела достаточную кинетическую энергию для того, чтобы образовать электронные пары. Возможность образования таких пар будет изменять соотношения, связывающие величины  $s$  и  $\epsilon$  и величины  $e$  и  $p$ . Тем не менее, в этом адиабатическом приближении эти связи полностью определяются величиной  $\gamma$  (давление  $p$  пропорционально  $s^\gamma$ ), и обнаружено, что величина  $\gamma$  не очень сильно меняется при изменении температуры. Она имеет одну и ту же величину для обоих экстремальных предельных случаев; для обоих случаев  $T \rightarrow 0$  и  $T \rightarrow \infty$  имеем  $\gamma = 1.333$ . Имеется минимальное значение  $\gamma$  между этими предельными случаями температур, которое соответствует величине  $\gamma = 1.270$ . Это наводит на мысль о том, что поправки, обусловленные влиянием электронных пар, не будут менять качественные аспекты наших ответов.

#### 14.3. Некоторые численные результаты

Предварительные вычисления дали результаты, приведенные в таблице 14.1, для заданной величины  $r$  при изменении только температуры в центре. В таблице приводятся значения температуры в центре  $t_c$ , радиуса  $r_0$ , массы звезды  $m_0$  и "число нуклонов  $N$ ". Что же интересного можно сказать об этих величинах? Для того, чтобы понять, что происходит с заданной звездой, мы могли бы спросить, какая последовательность значений радиуса и центральной температуры соответствует одному и тому же числу нуклонов, если полная энергия на один нуклон падает. Мы ожидаем, что это может моделировать ситуацию в звезде, в которой излучение медленно уносит энергию. Числа в таблице не дают в достаточной степени полное представление, так чтобы мы могли быть в этом уверены, тем не менее, мы видим, что энергия на нуклон уменьшается при уменьшении температуры в центре; это есть действительно описание того, что звезда охлаждается, если она излучает энергию.

Будут ли такие звезды самопроизвольно "размазываться" по пространству? Устойчивость нашей звезды еще не изучена. В рамках того же самого решения вычисления, которые приводят к одному и тому же числу нуклонов и одному и тому же значению  $r$ , могут сравниваться как

по значениям радиуса, так и по значениям температуры в центре. Факт, что очевидно имеется минимум значения  $r_0$  при значениях температуры в центре где-то между 0.4 и 1.0, заставляет задуматься; звезда может иметь устойчивое решение. Другой способ изучения устойчивости состоит в том, чтобы рассмотреть "взрывы". Предположим, что мы вычисляем полную энергию числа  $N$  нуклонов с определенной энтропией на нуклон, т.е. определенным значением  $\tau$ , и затем разламываем эти нуклоны на две звезды с одним и тем же значением  $\tau$ , сохраняя сумму  $N$  постоянной. Можем ли мы получить работу из этого процесса или мы должны затратить работу для того, чтобы получить конфигурацию из двух звезд? Предполагается, что величина  $\tau$  является той же самой, поскольку считается, что все вещество двигается вместе из одной и той же начальной конфигурации. Можем ли мы найти какую-нибудь информацию о таком процессе, основываясь на приводимых выше числах? Если  $N$  уменьшается, мы находим, что избыток массы **увеличивается**. Это означает, что два объекта с меньшими значениями  $N$  могут быть более массивными, поэтому требуется работа для того, чтобы разделить такую систему. Это наводит на мысль, что звезда может не выбрасывать вещество, а сохранять его в одном коме.

Предшествующие рассмотрения также показали нам, что звезды, которые следуют описанию в нашей модели, не могут на самом деле сформироваться; все они обладают большей энергией, чем энергия покоя нуклона, следовательно, требуется некоторая энергия для того, чтобы собрать их вместе.

Один из фактов, который мы можем обнаружить, состоит в том, что в любом случае поправки, обусловленные общей теорией относительности, являются значительными и очень важными. В каком направлении электронные пары будут изменять наше решение? Они стремятся сделать звезду более похожей на такую, в которой в центре становится теплее при том, что электроны способствуют охлаждению внешней части звезды.

Должны ли мы всегда волноваться по поводу гравитационного радиуса? Мы написали наши уравнения таким образом, что  $m(r) = 0$  в начале координат, и масса увеличивается при увеличении  $r$ . Если мы всегда получаем столь большие массы такие, что почти выполняется равенство  $2m(r) = r$ , то наше дифференциальное уравнение (14.1.10г) показывает, что вблизи критического значения величины  $r$  величина  $t$  должна была бы логарифмически стремиться к  $-\infty$ . Таким образом, перед тем, как мы дойдем до такой точки, что температура упала бы до нуля, мы в нашей схеме должны были бы остановиться в этой точке. Тем не менее, численные результаты для массы и радиуса оказываются настолько далекими от критических значений, что возможно у нас нет нужды в настоящее время беспокоиться по поводу этой проблемы.

#### 14.4. Планы и предположения для дальнейших исследований сверхзвезд

Имеется другое математическое определение проблемы звезд, которое может быть пригодно для изучения. Мы получили, что полное число нуклонов в звезде задается соотношением

$$N = 4\pi \int_0^{r_0} \frac{sr^2 dr}{\sqrt{1 - 2m/r}}, \quad (14.4.1)$$

где

$$m = 4\pi \int_0^r dr' \rho r'^2,$$

и плотность  $\rho = \rho(s)$  известна через постулированное уравнение состояния, такое как наш "адиабатический" закон

$$s \frac{d\rho}{ds} = p + \rho. \quad (14.4.2)$$

Задача определения равновесия состоит в том, чтобы определить конфигурацию с минимальной массой, исходя из заданного числа нуклонов. Мы можем получить такую же информацию, фиксируя значение массы и задавая вопрос о максимальном значении нуклонов. Математическая формулировка состоит в вариационном дифференциальном функциональном уравнении

$$\frac{\delta N}{\delta s(r)} = 0. \quad (14.4.3)$$

Если мы справляемся с решением этого уравнения, мы получаем экстремальные решения  $s(r)$ . Весьма приятно для меня чувствовать, что даже очень сложные проблемы пытаются выглядеть просто, будучи выражеными на языке соответствующим образом выбранных принципов! Мы найдем решения с минимальной массой, если экстремум  $N[s(r)]$  действительно является максимумом.

После того, как у нас будут исследованы статические решения, мы можем обратить наше внимание к полной динамической задаче. Дифференциальные уравнения выглядят устрашающе. По мере того, как мы рассматриваем их чудовищно сложную структуру и начинаем делать сравнения с классическим пределом, значение многих членов становится более очевидным. В наипростейшем случае газовой динамики уравнения описывают распространение звука в неоднородной среде; это нелинейный звук, так что в среде могут образовываться ударные волны и т.д. Не вызывает удивления то, что объект нашего исследования настолько сложен. Наиболее простая модель исследований может касаться небольших колебаний в окрестности статических решений; действительные частоты обозначали бы то, что наши предыдущие решения, однажды сформировавшиеся, были бы на самом деле устойчивыми, и мнимые частоты говорили бы нам о том, что наши решения были бы неустойчивыми.

Усовершенствованные вычисления нуждаются также в лучших выражениях для "физической" стороны уравнений. Что происходит, если мы учитываем испускание нейтрино из центра звезды? Будет ли происходить падение вещества к центру в этом случае или происходит что-либо другое? В случае, когда звезда является в большой степени релятивистской, тогда эти нейтрино могут уносить большую часть полной энергии и, таким образом, могут привести к существенному уменьшению гравитационного притяжения. Классическая теория звезд основана на довольно прочном основании, когда масса покоя частиц определяет почти полностью значение энергии. В этом случае уносящаяся из центра звезды энергия приводит к дальнейшему коллапсу, что ведет к тому, что центр звезды становится горячее. Если центр становится горячее, то ядерные реакции доставляют больше энергии, которая должна быть унесена, чтобы звезда осталась устойчивой. Если же центр становится настолько горячим, что горение ядерного топлива производит энергию больше, чем может быть унесено из звезды, ситуация становится неустойчивой и звезда взрывается. В сильно релятивистском случае, тем не менее, новые качественные признаки начинают появляться, когда энергия излучения составляет большую часть полной массы. Здесь, когда центр звезды "охлаждается" потерей энергией, энергия, соответствующая притяжению звезды, становится меньше, поскольку существенная часть массы уносится. Таким образом, может быть так, что для достаточно большой массы, может не быть процессов, приводящих ко взрыву.

Я полагаю, что решения данной задачи покажут, что для масс, больших, чем несколько единиц, умноженных на  $10^8$  солнечных масс, сферически симметричные решения для конденсирующейся материи не приводят к коллапсу, но "сортируют грязь", влетающую в звезду и вылетающую из звезды, в окрестности определенного наиболее предпочтительного значения радиуса. Обычные процессы звездной эволюции могут иметь место, если распределение становится несферическим. Двигаясь в этом направлении, потом возможно мы сможем найти объяснение тому факту, что оказывается, что все видимые звезды имеют почти одинаковый размер. Решение полной динамической задачи может привести нас к тому, чтобы понять, как вещество, однородно распределенное, может начать конденсироваться симметричным образом, и тогда в определенной точке оказывается предпочтительным формирование сгустков, которые могут конденсироваться дальше. Результаты могут оказаться очень высоко чувствительными к любому количеству углового момента, которым первоначально обладает конденсирующаяся масса. Например, планеты содержат почти 95% полного углового момента нашей Солнечной системы. Может быть так, что конденсирующаяся масса может сформировать шары, к которым переносится большая часть углового момента.