Лекция 15

15.1. Физическая топология решений Шварцшильда

В предыдущей лекции у нас были сделаны некоторые предположения о том, что распределение действительного вещества не может сконденсировать вещество внутри сферы с радиусом меньшим, чем величина гравитационного радиуса $2m$; даже если мы в порядке рабочей гипотезы приходим к выводу о том, что "кротовые норы" не могут быть образованы из реального вещества, остается вопрос, который касается того, действительно ли решение Шварцшильда представляет случай, в котором тензор $G^{\mu}{}_{\nu}$ равен нулю *всюду*, случай, в котором вещества нет вовсе, может выглядеть как вещество, которое рассматривается с расстояния. Следовательно, давайте попытаемся продолжить решение Шварцшильда внутрь критического радиуса $2m$. Мы полагаем, что это должно быть возможным потому, что хотя метрика

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)(dt)^2 - \frac{(dr)^2}{1 - 2m/r} - r^2((d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\phi)^2) \qquad (15.1.1)$$

имеет очевидную сингулярность при $r = 2m$, компоненты тензора кривизны являются гладкими в этой точке. Компоненты тензора кривизны становятся сингулярными в начале координат $r = 0$, так что действительно происходит что-то ужасное с пространством в начале координат. Космический корабль, падающий в начало координат, может быть катастрофическим образом искривлен, потому что приливные силы становятся бесконечными, это есть тип ужасного поведения, который следует из сингулярности тензора кривизны. Все, что происходит при $r = 2m$, состоит в том, что коэффициенты перед членами $(dt)^2$ и $(dr)^2$ меняют знак в соотношении (15.1.1), тем не менее, пространство остается по-прежнему с сигнатурой три и один, так что пространство чувствует себя совершенно нормально.

Давайте рассмотрим разложение пространства в окрестности сингулярной точки. Предположим, что мы меняем координаты в окрестности $r = 2m$, и рассмотрим плоскости $d\phi = 0$, $d\theta = 0$. На языке новой переменной x, мы имеем

$$\begin{aligned} x &= (1 - 2m/r), \\ r &= 2m(1 + x) \quad \text{при малых значениях } x, \\ (ds)^2 &= x(dt)^2 - (2m)^2\frac{(dx)^2}{x}, \end{aligned} \qquad (15.1.2)$$

вблизи сингулярной точки. Хотя пространство меняет знак, когда x меняет знак, при $x > 0$ метрика может быть заменена вновь таким образом, что она становится плоской; простое координатное преобразование приводит

метрику к "полярному" виду

$$x = R^2 \to (ds)^2 = R^2(dt)^2 - (4m)^2(dR)^2, \tag{15.1.3}$$

с использованием этого соотношения метрика легко может быть преобразована в метрику Минковского путем подстановки

$$\begin{aligned} v &= 4mR\cosh(t/4m), \\ u &= 4mR\sinh(t/4m), \\ \to (ds)^2 &= (du)^2 - (dv)^2. \end{aligned} \tag{15.1.4}$$

Эти результаты показывают, что пространство вблизи сингулярной точки ведет себя совершенно хорошо, так что сингулярность Шварцшильда есть особенность координат, которые мы определили. Для того, чтобы связать геодезические, проходящие через точку $r = 2m$, уравнение (15.1.4) подсказывает подстановку

$$x = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = -\frac{(u^2 - v^2)}{(4m)^2}, \quad \frac{u}{v} = \tanh\left(\frac{t}{4m}\right), \tag{15.1.5}$$

на языке координат u и v пространство и метрика являются гладкими с обеих сторон $r = 2m$. Подобное преобразование использовалось Фуллером и Уилером [FuWh 62] для того, чтобы получить пересечение промежутка, где имелась координатная особенность. Геодезические, правильно соединяющиеся через значение $r = 2m$, показывают, что частицы, падающие по направлению к гравитирующей массе, при значениях координаты r меньших, чем ее критическое значение $2m$, не отражаются в какое бы то ни было "новое" пространство на другой стороне любой горловины, а сохраняют свое падение по направлению к началу координат. Здесь нет противоречия с рассмотрениями, которые привели к предположениям о кротовых норах. Топология типа горловины получается путем разрезания пространства неким особым способом, если положим $dt = 0$. Тем не менее, движение реальных частиц не происходит в пространстве, в котором $dt = 0$, и нет основания тому, почему топология подпространства $dt = 0$ должна бы соответствовать общему свойству четырехмерного пространства. Тороидальный пончик может быть вырезан из целого куска даже тогда, когда нет ничего тороидального у этого целого куска. Для физических задач топология, которой мы интересуемся, касается геодезических, и здесь не существует времениподобных геодезических, которые бы проходили через кротовую нору.

15.2. Орбиты частиц в поле Шварцшильда

Поучительно получить описание радиального движения частиц как функции собственного времени s. Как обычно для задач описания движения в поле центральных сил, движение происходит в одной плоскости (мы выбираем ее таким образом, что $\theta = \pi/2$), и радиальное движение определяется двумя параметрами K и L, связанными с полной энергией и угловым моментом, которые есть первые интегралы уравнения для времени

и уравнения для угла, как следует из следующих уравнений: уравнения геодезических

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}, \tag{15.2.1}$$

может быть тривиальным образом проинтегрировано, когда $\nu = 3, 4$ (координаты ϕ, t), поскольку метрический тензор не зависит от ϕ и t, и, следовательно, правая часть уравнения (15.2.1) равна нулю. Из этого условия определяются следующие интегралы:

$$K = (1 - 2m/r)\frac{dt}{ds}, \quad L = r^2\frac{d\phi}{ds}. \tag{15.2.2}$$

Уравнение для описания изменения радиальной координаты может быть получено, если мы положим $\nu = 1$ в уравнении (15.2.1), но это требует больше работы, чем это необходимо. Легче получить уравнение для описания изменения радиальной координаты из условия

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 1, \tag{15.2.3}$$

которое может быть явным образом записано через величины L и K следующим образом:

$$\frac{K^2}{(1-2m/r)} - \frac{1}{(1-2m/r)}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{L^2}{r^2} = 1. \tag{15.2.4}$$

Собственное время, соответствующее пролету частицы от значения радиуса r_0 до значения радиуса r_1, задается следующим соотношением:

$$\int ds = \int_{r_0}^{r_1} dr\ \left(K^2 - (1-2m/r)(1+L^2/r^2)\right)^{-1/2}. \tag{15.2.5}$$

Необходимо заметить, что более не происходит ничего ужасного при $r = 2m$, подынтегральное выражение ведет себя хорошо, нет никакой задачи соединения траектории, проходящей через какой-либо промежуток (содержащий координатную особенность $r = 2m$). Если бы мы сначала изучали орбитальные движения и не беспокоились по поводу метрики, мы могли бы не заметить сингулярности в координатах Шварцшильда и могли бы получить правильные ответы, просто используя соотношение (15.2.5).

Появление квадратного корня является довольно обычным при рассмотрении орбитальных движений, и анализ поведения выражения, стоящего под квадратным корнем, является весьма важным. Интегрирование прекращается в том случае, если выражение, стоящее под квадратным корнем, становится отрицательным, меньшие значения радиуса никогда не могут быть достигнуты частицами (движущимися по этим геодезическим). Если угловой момент L достаточно велик, то квадратный корень становится мнимым при значении радиуса большем, чем $2m$, и орбиты имеют такое же

качественное поведение, что и в ньютоновском случае.[1] С другой стороны, если энергия и угловой момент являются такими, что частица должна пересечь значение радиуса $2m$, то выражение, стоящее под знаком квадратного корня, не должно стать отрицательным при значениях радиальной координаты меньших, чем $r = 2m$, и это означает то, что все частицы продолжают свое падение к началу координат. Фактически, как только частица оказалась внутри области $r = 2m$, частицы с большим угловым моментом L падают быстрее, "центробежная сила" очевидно действует скорее как притяжение, чем как отталкивание.

В этом месте я хочу упомянуть некоторые своеобразные результаты, которые получаются, когда делается предположение, что поле Шварцшильда соответствует заряженному объекту, на который смотрят с расстояния. Легко может быть показано, что единственное изменение в метрике заключено в следующей замене

$$(1 - 2m/r) \to (1 - 2m/r + q^2/r^2), \tag{15.2.6}$$

где q – видимый заряд. Когда такое выражение подставлено в соответствующий интервал собственного времени (15.2.5), квадратный корень неизбежно является мнимым для достаточно малых значений радиуса, так что частица никогда не попадает в начало координат, а всегда отражается назад. Это отталкивание не обусловлено действием электрической силы между частицами, оно является присущим этой метрике свойством, если мы настаиваем на том, что поля должны бы соответствовать таким полям, которые образует при больших значениях радиуса r заряженная частица, находящаяся в начале координат. Таким образом, это отталкивание должны были бы чувствовать даже нейтральные частицы, падающие в заряженный центр.

Метрика, соответствующая заряженной массе и определяемая соотношением (15.2.6), очевидно имеет *две* сингулярные точки. Представляет некоторый интерес изучить продолжение геодезических падающей частицы через эти две сингулярности; не представляется немыслимым, что частица может вылететь наружу так, что отраженная частица выходит наружу раньше, чем она начала двигаться по направлению к такому объекту! Я предполагаю такую возможность, потому что очевидно, что падающей частице требуется бесконечное время для того, чтобы достичь первую особенность (с точки зрения внешнего наблюдателя), хотя целая траектория, входящая в данный объект и выходящая из него с точки зрения самой частицы, может занимать конечное время.

[1] В метрике Шварцшильда полное решение задачи о сечении захвата частицы, обладающей произвольной скоростью на бесконечности, приведено в работе [Заха 88*] (а обобщение этих соотношений на случай заряженной черной дыры получено в работе [Zakh 94*]). (*Прим. перев.*)

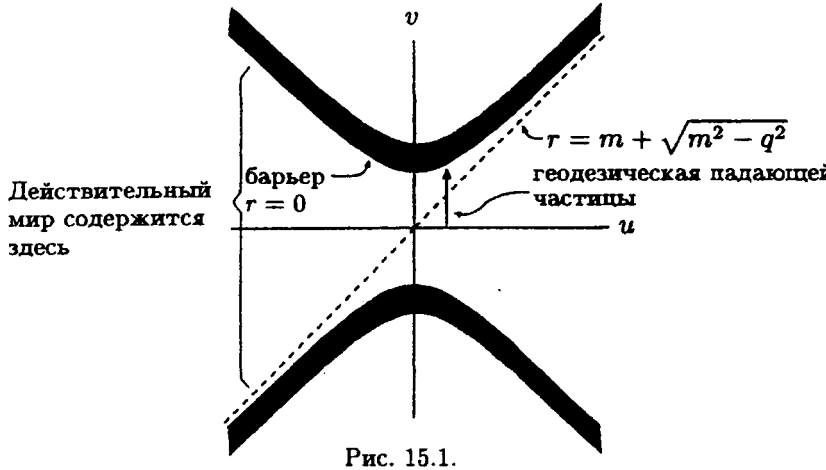

Рис. 15.1.

15.3. О будущем геометродинамики

Длительные обсуждения, которые мы проводили по исследованию решений Шварцшильда, являются симптомом того, что мы имеем теорию, которая не исследована полностью. Настало время переходить к изучению других тем, однако, я хочу представить вам мои соображения, каковы могут быть ответы, как только теория будет более полно исследована. Оригинальные размышления Дж.А. Уилера о кротовых норах были основаны на идее, что возможно построить решения уравнений Эйнштейна, для которых $G^{\mu}{}_{\nu} = 0$ всюду, и которые, тем не менее, действовали бы или чувствовали бы (гравитационное поле), как будто они являются настоящими массами. Топология кротовых нор такова, что было интуитивно ясно, что линии электрического поля, входящие в кротовую нору и выходящие где-то из кротовой норы, должны были бы очень хорошо соответствовать существованию положительных и отрицательных зарядов в точности одной и той же величины. Даже хотя мы продемонстрировали то, что топология геодезического пространства является не такой как топология кротовой норы, идея того, что вещество и заряд есть проявление топологии пространства, очень красивая и заманчивая, и никак не дискредитируется тем, что она не приносит никакого количественного результата, выраженного на языке решения Шварцшильда. На самом деле было бы очень замечательно иметь $G^{\mu}{}_{\nu} = 0$ *всюду*, так чтобы, говоря словами, используемыми недавно для описания геометродинамики, материя возникла из того, что не есть материя, и заряд возник из того, что не есть заряд.

В ближайшем будущем можно исследовать свойства решения Шварцшильда в начале координат $r = 0$. Я полагаю, что невозможно продемонстрировать то, что $G^{\mu}{}_{\nu} = 0$ *всюду*, но предпочтительнее $G^{\mu}{}_{\nu} = \delta(x)$ или что-либо такого рода. Объяснение поведения зарядов будет требовать дальнейшего детального изучения; я уверен в том, что такое "отталкивание" в начале координат будет являться неверным заключением, в общем

обусловленным имеющейся противоречивостью в предположении точечного заряда; плотность заряда в окрестности точечного заряда растет как E^2 или $1/r^4$, что означает, что масса, находящаяся внутри шара любого конечного радиуса, должна быть бесконечной. Если масса не является бесконечной, то мы должны записать нечто вроде

$$\text{Масса внутри} = (\text{Константа}) - \frac{q^2}{2r}. \tag{15.3.1}$$

Если нет отрицательной массы внутри шара любого радиуса, то тогда нам не разрешается двигаться внутрь шара радиуса a, где a определяется условием (Константа) $= q^2/2a$. Величина этой константы могла бы быть произвольной, если масса, находящаяся в начале координат, не являлась бы чисто электромагнитной. В области вне шара радиуса a, мы могли бы иметь следующие выражения для гравитационного поля и потенциала:

$$\text{Поле} = -\frac{q^2}{2r^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right), \quad \text{Потенциал} = \frac{q^2}{2r}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2r}\right). \tag{15.3.2}$$

Если мы возьмем константу не бесконечной и в явном виде, то мы не можем получить отталкивания. На языке новых координат u и v весь действительный мир содержится в подобласти, и геодезические падающих частиц попадают в *барьер* при $r = 0$. Доставляющий беспокойство промежуток при $r = m + \sqrt{m^2 - q^2}$ соответствует совершенно хорошо ведущей себя области пространства, где геодезические даже не имеют петли (см. рис. 15.1). Большой интерес представляет изучение геометрии такой заряженной массы, в том случае, если мы делаем ее все меньше и меньше.

Хотя геометродинамика, как она развивается Дж.А. Уилером и его соавторами, не принесла еще никаких количественных результатов, эта теория содержит ростки уверенных представлений, которые, все же, могут привести к эффектным успехам в нашем понимании физики. Необходимо дать кредит Уилеру для действительного понимания этих признаков наших нынешних теорий, которые до конца неисследованы, но кажутся многообещающими. В течение некоторого времени я был ассистентом Дж.А. Уилера, я многократно получал пользу от гения его интуиции для понимания того, в каком направлении лежит ответ. Одно время я пытался построить теорию классической электродинамики, в которой заряды взаимодействуют только с другими зарядами, вместо взаимодействия с другими полями, я чувствовал, что поля должны бы исчезать, оставаясь как способ прослеживания запаздывания. Все очень хорошо продвигалось вперед до тех пор, пока не пришло время объяснить реакцию излучения, в которой сила чувствуется ускоряющейся частицей задолго до того, как эти поля имели время путешествовать к другим зарядам и обратно. Когда я рассказал Уилеру о моих проблемах, он сказал "Почему Вы не используете опережающий потенциал?" Опережающий потенциал? Это было нечто такое, что каждый выбрасывал как ненужное. Было очевидно, что это понятие лишено физического смысла, предполагать его использование было беспрецедентно

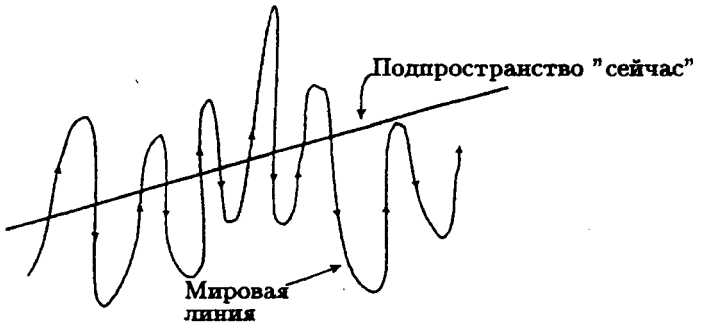

Рис. 15.2.

смелым поступком. Тем не менее, некоторое время спустя количественная теория использования опережающего потенциала была разработана, и мы имели теорию электродинамики, в которой заряды действовали только на другие заряды, путем использования потенциала, половина из которого запаздывающий потенциал и половина опережающий потенциал.

В другом случае был телефонный звонок от него в середине ночи, когда он сказал мне: "Я знаю, почему все электроны и позитроны имеют одинаковый заряд!" Затем он объяснял мне дальше: "Все они являются одним и тем же электроном!" Его идея состояла в том, что если один и тот же объект имеет мировую линию, которая является предельно сложной, то когда мы смотрим на него в подпространстве "сейчас", мы видим его во многих разных местах (См. рис. 15.2.) Позднее, я оказался способен создать качественную идею такого сорта, путем интерпретации позитрона как существование электрона, чья фаза изменяется обратным образом от времени, и развития упрощенных методов для вычисления матричных элементов, включающих в себя аннигиляцию и образование пар. Было бы действительно очень замечательно, если бы идея кротовых нор и геометродинамики могла бы быть завершена для того, чтобы усовершенствовать наше понимание Природы, и зная Уилера, мне не кажется невероятным то, что его интуиция может когда-нибудь подтвердиться.

Этими комментариями о проблемах, представляющих значительный интерес в настоящее время, мы заканчиваем обсуждение классической теории гравитации.