

## Лекция 16

### 16.1. Связь между полями вещества и гравитацией

В лекции 10 мы выписали члены действия, соответствующие распространению свободных частиц и полей. Все, что не вошло ранее в полное действие, может быть рассмотрено как взаимодействие между полями, и мы можем приступить к вычислению различных процессов путем использования теории возмущений. В этом случае нет необходимости в том, чтобы оправдываться в использовании возмущений, так как гравитация намного слабее других полей, для которых кажется, что теория возмущений дает предельно точные предсказания. Известные части общего действия являются следующими:

$$-\frac{1}{2\lambda^2} \int d^4x \sqrt{-g} R + \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - m^2 \phi^2) - \alpha \int d^4x \sqrt{-g} R \phi^2. \quad (16.1.1)$$

Первое приближение, которое мы сделаем, состоит в том, что мы положим коэффициент  $\alpha$  равным нулю. Если оставить такой член в действии, то обычно ухудшается ситуация, связанная со многими проблемами расходимости, с которыми мы столкнемся позже, и в этом случае увеличивается объем вычислений. Поскольку любой выбор этого коэффициента может быть произвольным в нынешнем состоянии искусства эксперимента, мы выбираем значение, которое упрощает вычисления наиболее удобным для нас образом. Второй шаг состоит в том, чтобы вытащить член, представляющий пропагатор этих полей, путем введения разложения

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\lambda h_{\mu\nu}. \quad (16.1.2)$$

После того, как мы записали действие на языке полей  $h_{\mu\nu}$  и скалярного материального поля, мы получаем следующее соотношение:

$$\text{Действие} = \int d^4x F^2[h_{\mu\nu}] + \int d^4x I[h_{\mu\nu}, \phi] + \int d^4x M[\phi], \quad (16.1.3)$$

где

$$F^2[h^{\mu\nu}] = \frac{1}{2} \left[ h^{\mu\nu, \lambda} \bar{h}^{\mu\nu, \lambda} - 2 \bar{h}^{\mu\lambda, \lambda} \bar{h}_{\mu\nu}^{\phantom{\mu\nu}\nu} \right],$$

$$M = \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - m^2 \phi).$$

Вариации функции  $I$  по отношению к полям  $h_{\mu\nu}$  или  $\phi$  представляют члены источника в дифференциальных уравнениях полей. Эти уравнения могут

быть записаны в следующем виде в пространственном и импульсном представлениях:

$$\square \phi - m^2 \phi = - \left( \frac{\delta I}{\delta \phi} \right) \rightarrow \phi = - \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)} I \left( \frac{\delta I}{\delta \phi} \right),$$

$$-h_{\mu\nu,\lambda}{}^{\lambda} + \bar{h}_{\mu\lambda,\nu}{}^{\lambda} + \bar{h}_{\nu\lambda,\mu}{}^{\lambda} = \lambda \bar{S}_{\mu\nu}, \quad \text{где} \quad S^{\mu\nu} = -\frac{1}{\lambda} \left( \frac{\delta I}{\delta h_{\mu\nu}} \right). \quad (16.1.4)$$

Заметим, что  $S_{\mu\nu}$  есть та величина, которую мы называли <sup>new</sup> $T_{\mu\nu}$  в лекции 6 (см. соотношение (6.1.2)). Что мы должны делать дальше? Из-за тщательного построения первоначального действия как инвариантного интеграла может быть показано, что обыкновенная дивергенция тензора источника  $S_{\mu\nu}$  тождественно равна нулю. В импульсном представлении

$$k^\nu S_{\mu\nu} = 0. \quad (16.1.5)$$

Тензор источника содержит в себе и источники материи, и источники гравитации. Из-за свободы, которую мы имеем в выборе калибровки, мы можем сделать тензор с чертой  $\bar{h}_{\mu\nu}$  бездивергентным и, таким образом, получить решение

$$k^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \rightarrow k^2 h_{\mu\nu} = \lambda \bar{S}_{\mu\nu}, \quad h_{\mu\nu} = \frac{\lambda}{k^2 + i\epsilon} \bar{S}_{\mu\nu}. \quad (16.1.6)$$

Тензор, стоящий справа, есть не просто тензор неизвестного источника: теперь он хорошо определен на языке первоначального действия (16.1.1) и разложения (16.1.2), так что уравнения являются совместными и энергия сохраняется. Раз у нас есть разложение по степеням константы связи  $\lambda$ , мы можем, используя обычные правила теории возмущения, приступить к вычислению всех диаграмм каждого заданного порядка  $\lambda$ . Ключевыми разложениями являются разложение  $g^{\mu\nu}$  и разложение  $\sqrt{-g}$ . Первое легко может быть выписано по аналогии с разложением  $(1+x)^{-1}$ , когда  $x$  есть малая величина. Мы имеем

$$g^{\mu\nu} = (\eta_{\mu\nu} + 2\lambda h_{\mu\nu})^{-1} = \eta^{\mu\nu} - 2\lambda h^{\mu\nu} + 4\lambda^2 h^\mu{}_\beta h^{\beta\nu} - 8\lambda^3 h^{\mu\beta} h_{\beta\tau} h^{\tau\nu} + \dots, \quad (16.1.7)$$

где необходимо помнить правило суммирования для плоского пространства-времени, как в соотношении (4.1.6). Выражение для разложения  $\sqrt{-g}$  может быть вычислено посредством манипуляций, описанных в лекции 6. Используя соотношение (6.3.11) при

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\beta} \left( \delta^\beta{}_\nu + 2\lambda h^\beta{}_\nu \right),$$

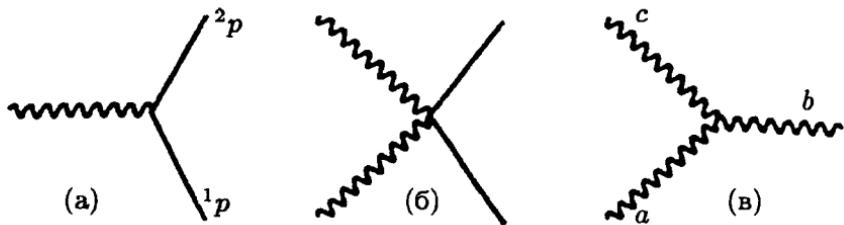


Рис. 16.1.

мы имеем

$$\begin{aligned}
 \sqrt{-\text{Det } g_{\mu\nu}} &= \\
 &= \sqrt{-\text{Det } \eta_{\mu\nu}} \exp \left[ \frac{1}{2} \text{Tr} \log (\delta^\beta{}_\nu + 2\lambda h^\beta{}_\nu) \right] \\
 &= \exp \left[ \frac{1}{2} \text{Tr} \left( 2\lambda h^\beta{}_\nu - \frac{1}{2} (2\lambda)^2 h^\beta{}_\tau h^\tau{}_\nu + \frac{1}{3} (2\lambda)^3 h^\beta{}_\tau h^\tau{}_\sigma h^\sigma{}_\nu + \dots \right) \right] \\
 &= \exp \left[ \frac{1}{2} \left( 2\lambda h^\beta{}_\beta - \frac{1}{2} (2\lambda)^2 h^\beta{}_\tau h^\tau{}_\beta + \frac{1}{3} (2\lambda)^3 h^\beta{}_\tau h^\tau{}_\sigma h^\sigma{}_\beta + \dots \right) \right] \\
 &= 1 + \lambda h^\beta{}_\beta - \lambda^2 (h^\beta{}_\rho \bar{h}^\rho{}_\beta) + \dots . \tag{16.1.8}
 \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения для  $\sqrt{-g}$  и для  $g^{\mu\nu}$  в действие, мы получаем явные выражения для связи материи и гравитации; результат для второго члена соотношения (16.1.1) есть, например, следующий:

$$\begin{aligned}
 S_m &= \frac{1}{2} \int \left[ \left( \eta^{\mu\nu} - 2\lambda h^{\mu\nu} + (2\lambda)^2 h^{\mu\beta} h_\beta{}^\nu + \dots \right) (\phi_{,\mu} \phi_{,\nu}) - m^2 \phi^2 \right] \\
 &\quad \left( 1 + \lambda h^\rho{}_\rho - \lambda^2 (h^\sigma{}_\rho \bar{h}^\rho{}_\sigma) + \dots \right) d^4x \\
 &= \frac{1}{2} \int d^4x (\phi_{,\mu} \phi_{,\mu} - m^2 \phi^2) - \lambda \int d^4x h^{\mu\nu} \left[ \overline{\phi_{,\mu} \phi_{,\nu}} + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \eta_{\mu\nu} \right] \\
 &\quad - \lambda^2 \int d^4x \left[ \frac{1}{2} h^\lambda{}_\rho \bar{h}^\rho{}_\lambda (\phi_{,\mu} \phi_{,\mu} - m^2 \phi^2) - 2h^{\mu\rho} \bar{h}_\rho{}^\nu \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} \right]. \tag{16.1.9}
 \end{aligned}$$

Члены самого наиболее низкого порядка включают в себя взаимодействие двух полей  $\phi$  и одного  $h$ , что соответствует вершине, показанной на рис. 16.1(a). В каждой вершине мы требуем, чтобы импульсы сохранялись. Это правило происходит от объемного интегрирования в действии: нет вклада от члена, полная фаза которого не равна нулю. Запишем решение типа плоской волны следующим образом:

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} \exp(iq \cdot x), \quad \phi = \exp(ip \cdot x); \tag{16.1.10}$$

на языке тензора поляризации  $e_{\mu\nu}$ , амплитуда в вершине первого порядка

$$-2\lambda \left[ e^{\mu\nu} {}^1 p_\mu {}^2 p_\nu - \frac{1}{2} e^\rho{}_\rho ({}^1 p_\tau {}^2 p^\tau - m^2) \right]. \tag{16.1.11}$$

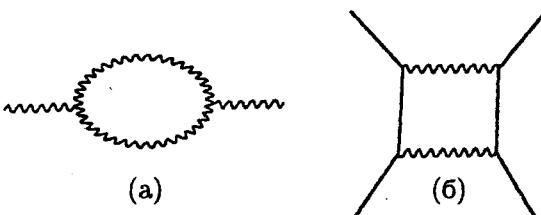


Рис. 16.2.

Любая диаграмма, которая включает в себя только такие вершины, теперь могла бы быть вычислена путем простой подстановки в соответствующие амплитуды в каждой вершине и пропагаторы частиц и гравитонов между вершинами в точности так же, как и в электродинамике.

Давайте посмотрим на следующий порядок. Члены, показанные в (16.1.9), включают в себя произведения двух  $h$  и  $\phi$ , так что две прямых и две волнистых линии сходятся вместе в некоторой точке, как показано на рис. 16.1 (б). Имеются также члены, возникающие от разложения первого члена в соотношении (16.1.1), включающего в себя произведения трех  $h$ , соответствующие диаграммам, в которых три волнистых линии сходятся в точке, как показано на рис. 16.1 (в). Обилие неявных сумм по трем индексам приводит к членам, которые очень и очень громоздки, когда они записаны явным образом. Например, один из членов, в котором три волнистых кривых сходятся вместе, есть  $h_{\mu\nu,\beta} h^{\mu\beta} h^{\nu\alpha,\alpha}$ ; когда мы переводим это на язык импульсов и компонент поляризации, мы получаем члены, соответствующие всем перестановкам трех гравитонов, например,

$$\begin{aligned} {}^a q_\beta {}^a e_{\mu\nu} {}^b e^{\mu\beta} {}^c q_\alpha {}^c e^{\nu\alpha} + {}^b q_\beta {}^b e_{\mu\nu} {}^a e^{\mu\beta} {}^c q_\alpha {}^c e^{\nu\alpha} + \\ + {}^b q_\beta {}^b e_{\mu\nu} {}^c e^{\mu\beta} {}^a q_\alpha {}^a e^{\nu\alpha} + \dots . \end{aligned} \quad (16.1.12)$$

Эта сложность сопровождает одиночную вершину, которая всегда соответствует одной части амплитуды; когда мы соединяем эти выражения, как, например, при вычислении диаграммы, подобной показанной на рис. 16.2 (а), мы можем получить ни много ни мало как 108 членов.

## 16.2. Завершение теории: простой пример гравитационного излучения

В предыдущем разделе мы привели полное описание теории. Осталось продолжить вычисления соответствующих диаграмм для любых физических процессов в соответствии с теми же самыми правилами, которые используются в электродинамике. Характерные примеры некоторых простейших диаграмм были разрешены в лекции 4; например, амплитуда рассеяния при обмене одиночным гравитоном задается в соотношении (4.3.5). На практике, при соответствующей симметризации некоторых выражений необходима определенная тщательность, но при наличии некоторого опыта это становится довольно простым, и обозначения типа "черты" очень полезны для того, чтобы избежать чрезмерных алгебраических вычислений.

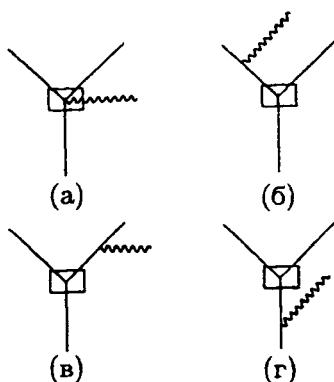


Рис. 16.3.

В самом низком порядке теория завершается путем этого уточнения. Все процессы, подходящим образом описываемые "древесными" диаграммами, не имеют трудностей для описания. "Древесными" диаграммами являются такие диаграммы, которые не содержат ни пузырей, ни замкнутых петель типа изображенных на рис. 16.2. Такое название очевидным образом связывается с тем фактом, что ветви дерева никогда сами по себе не замыкаются.

В более высоких порядках, когда мы допускаем пузыри и петли в диаграммах, теория оказывается неудовлетворительной, так как в этом случае она приводит к глупым результатам. Методы лечения этой болезни оказываются успешными только для одно-кольцевых диаграмм. Для того, чтобы обсудить эти средства лечения, для нас было бы проще изучить вкратце теорию векторного мезона Янга – Миллса, которая вызывает такие же трудности, но с этими трудностями значительно проще работать. Некоторые из этих трудностей имеют дело с отсутствием унитарности некоторых сумм диаграмм. Мы обсудим группу соотношений, которые выполнены между различными видами диаграмм. Эти соотношения не имеют прямых тестов, связанных с экспериментами по гравитации, но некоторые из них оказываются привычными по работе с другими полевыми теориями.

Я не знаю, возможно ли развить подобное средство лечения для анализа мультикольцевых диаграмм. Я полагаю, что нет; другими словами, я полагаю, что теория неперенормируема. Является ли это существенным возражением против теории, когда мы утверждаем, что она является неперенормируемой, я не знаю.

Наиболее интересная из тех проблем, с которыми мы будем иметь дело, это, возможно, проблема излучения гравитационных волн. Давайте в качестве исходного примера рассмотрим излучение одиночного гравитона, следующего распаду некоторых подходящих частиц. Так как мы будем использовать скалярную теорию вещества, возможно будет наилучшим то, что мы рассматриваем некоторый распад скалярных частиц, таких как  $K \rightarrow 2\pi$ . Испускание низкочастотных гравитонов необходимо для того,

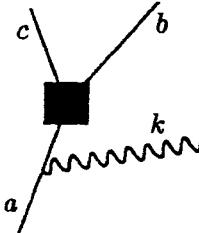


Рис. 16.4.

чтобы сказать гравитационным образом внешнему миру, что распад произошел, в основном так же, как фотон низкой энергии должен быть испущен при аналогичном распаде, когда некоторый заряд ускоряется. Вклад многих диаграммы, которые могут быть записаны так, что в них гравитон выходит из вершины распада, обычно много меньше, так что нам не нужны рассматривать этот случай сначала. В качестве упражнения могло бы быть полезным разрешить последние три диаграммы, показанные на рис. 16.3.

### 16.3. Излучение гравитонов при распаде частиц

Связь гравитонов с материей является настолько слабой, что поистине нет надежды пронаблюдать квантовые гравитационные эффекты, связанные с событиями, происходящими с элементарными частицами. В этом смысле вычисления, о которых мы говорим, что мы должны их делать, оказываются абсолютно не имеющими никакого отношения к практике. Тем не менее, мы предложили определенную теорию, и эти ненаблюдаемые процессы являются простейшими эффектами, которые наша теория предсказывает; они могут быть наблюдаемыми и важными в том случае, если взаимодействие будет сильнее.

Существует много одногравитонных диаграмм при распаде частицы. Для иллюстрации мы берем в рис. 16.4  $a \rightarrow b + c$ . Амплитуда в вершине  $a$ -гравитона задается соотношением

$$-2\lambda e^{\mu\nu} \left[ {}^1 p_\mu {}^2 p_\nu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} ({}^1 p_\alpha {}^2 p^\alpha - m^2) \right], \quad (16.3.1)$$

где предшествующие верхние индексы 1 и 2 обозначают материальную частицу до и после вершины. После испускания частица  $a$  движется с импульсом  $(^a p - k)$  к вершине распада, отсюда  ${}^2 p^\alpha = (^a p - k)^\alpha$ . Если мы положим, что амплитуда распада представляется величиной  $A$ , зависящей от импульса трех частиц  $(a, b, c)$ , чьи траектории проникают в черный ящик, выражение для амплитуды есть

$$\begin{aligned} & -2\lambda e^{\mu\nu} \left[ {}^a p_\mu ({}^a p - k)_\nu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} ({}^a p \cdot ({}^a p - k) - m_a^2) \right] \\ & \frac{1}{({}^a p - k)^2 - m_a^2} [A({}^a p - k, {}^b p, {}^c p)]. \end{aligned} \quad (16.3.2)$$

Для наших целей точная природа амплитуды  $A$  неважна; она представляет собой все, что здесь происходило бы без гравитона.

Амплитуда, описываемая соотношением (16.3.2), оказывается большой только в том случае, когда пропагатор имеет очень маленькую величину, т.е. когда  $k$  много меньше, чем  $\omega$ , то движение соответствует движению практически свободной частицы. В предельном случае слабых гравитонов этот процесс идентичен процессу торможения излучения, тормозному излучению слабых фотонов; этот процесс тесно связан с классическим пределом, так как он зависит от того, как зарядовые (массовые) токи движутся. Знаменатель есть  $-2 \cdot {}^a p \cdot k$ , и в пределе, когда частоты  $\omega$  величины  $k$  являются очень малыми, мы можем положить  $k = 0$  в числите. Если мы выносим множитель  $\lambda/\omega$ , то второй множитель в амплитуде имеет определенный предел, зависящий только от направления гравитона, его поляризации и амплитуды распада

$$\frac{\lambda}{\omega} \cdot \frac{e^{\mu\nu} {}^a p_\nu {}^c p_\mu}{{}^a p \cdot k/\omega} \cdot A({}^a p, {}^b p, {}^c p). \quad (16.3.3)$$

Имеется три похожих диаграммы, соответствующих испусканию гравитона из любой из этих трех частиц ( $a, b, c$ ). Диаграмма, соответствующая гравитону, выходящему из черного ящика, как может быть легко показано, много меньше по значению; это происходит потому, что почти нет свободной частицы, которая бы двигалась, отсюда следует, что нет "малого" знаменателя, который бы увеличил этот член. Если мы пренебрегаем этим членом и более высокими порядками, мы находим, что амплитуда испускания некоторого количества гравитонов есть

$$\frac{\lambda}{\omega} \cdot a \cdot A({}^a p, {}^b p, {}^c p); \quad a = \sum_i {}^i p_\mu {}^i p_\nu (-)_i \frac{e^{\mu\nu}}{{}^i p \cdot (k/\omega)}, \quad (16.3.4)$$

где  $i$  представляет частицу, соединенную с вершиной гравитона, и где  $(-)_i$  есть множитель, равный  $+1$  для входящей частицы и  $-1$  для выходящей частицы. Величина  $a$  есть кинематический и геометрический множитель. Для того, чтобы вычислить вероятность перехода, мы возводим в квадрат амплитуду, подставляем множитель плотности состояния  $k^2 dk d\Omega / (2\pi)^3$  и множитель нормализации, который есть  $\pi/(2E_i)$ , где  $E_i$  есть энергия каждой частицы. Получаем следующий результат

$$\mathcal{P} = a^2 \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\lambda^2}{4\pi^2}, \quad (16.3.5)$$

задающий вероятность испускания гравитона при одном распаде. Множитель  $\lambda^2$  делает эту вероятность предельно малой, настолько малой, что шансы весьма и весьма велики против того, чтобы был зарегистрирован измеряемый отскок в камере Вильсона, в водородной пузырьковой камере или соответствующее событие в искровой камере. Множитель с обратной зависимостью от энергии  $1/\omega$  приводит к тому, что эта величина очень велика при экстремально малых значениях энергии гравитона; тем не менее,

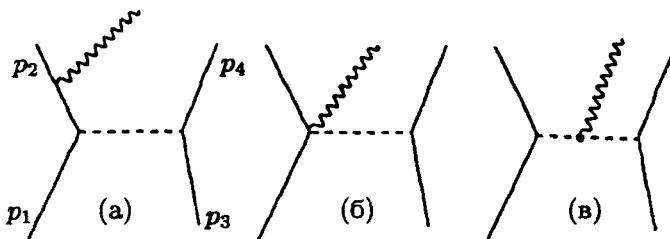


Рис. 16.5.

этот факт почти не относится к делу, так как величина  $\lambda^2/\omega$  становится близкой к 1 только при значениях энергии настолько низких, что длина волны гравитона должна была бы превосходить радиус вселенной на некоторый множитель, такой как  $10^{39}$ .

Хотя мы разрабатывали теорию, предполагающую наличие скалярных частиц, в низкоэнергетическом пределе ответ оказывается тем же самым вне зависимости от того, какой может быть спин частиц. Это происходит потому, что в низкоэнергетическом пределе к делу относятся только массовые токи и движение масс. В нашем ответе, конечно, имеется инфракрасная расходимость, так что вероятность испускания гравитона (если его энергия не относится к нашему рассмотрению) оказывается бесконечно большой. Это беспокойство является не более серьезным, чем инфракрасная расходимость для излучения низкоэнергетических фотонов, и эти проблемы могут быть устранены теми же самыми трюками, как и в низкочастотном "тормозном излучении."

#### 16.4. Излучение гравитонов при рассеянии частиц

Мягкий гравитон может быть испущен, когда две частицы рассеиваются при любом процессе, включающем в себя обмен гравитоном. Диаграммы первого порядка, которые описывают такие процессы, показаны на рис. 16.5. В низкоэнергетическом пределе важны только диаграммы типа (а), которые являются такими диаграммами, где вершина гравитона соединена со свободной частицей. Процессы, описываемые двумя другими диаграммами, являются много менее вероятными, если импульс гравитона много меньше, чем перенос импульса  $q$ ; в диаграмме (б), например, почти нет свободной частицы, которая бы двигалась, отсюда следует, что нет малого знаменателя. В диаграмме (в) второй пропагатор есть величина порядка  $1/(q - k)^2 \approx 1/q^2$ . Насколько мы интересуемся излучением, точная природа процессов общего рассеяния не важна. Я подчеркиваю это последнее утверждение, потому что всегда найдутся какие-нибудь теоретики, которые постоянно приводят какие-то мистические аргументы, для того чтобы утверждать, что излучение не происходит, если рассеяние является гравитационным – нет оснований для таких утверждений; что касается этого вопроса, излучение гравитационных волн является настолько реальным, насколько это возможно; вращение в системе Солнце – Земля может быть источником гравитационных волн. На самом деле, в этом разделе мы, воз-

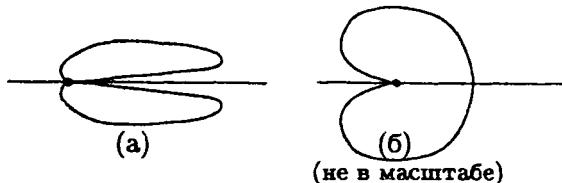


Рис. 16.6.

можно, должны ограничить наши размышления рассеяниями частиц; для движений таких больших объектов, как планеты или звезды, может быть более последовательно работать в классическом пределе. Гравитация не всегда является пренебрежимо слабой, это происходит только в процессах атомных столкновений.

Структура четырех амплитуд, соответствующих диаграммам, таким как показанные на рис. 16.5(а), является такой же, как и при распадах частиц. Если мы описываем поляризацию гравитона тензором  $e$ , то полная амплитуда пропорциональна амплитуде рассеяния в отсутствии гравитона, некоторым энергетическим множителям и величине

$$a = \sum_i (-)^i \frac{p \cdot e \cdot {}^i v}{1 - {}^i v \cos \theta}. \quad (16.4.1)$$

Знаменатель представляет собой произведение  ${}^i p \cdot k = E\omega - p \cdot k$ , когда значения энергии  $E$  и  $\omega$  вынесены в качестве множителей. Так как  $p = Ev$ , верхние индексы  $i$  относятся к каждой из четырех частичных ветвей в столкновении. Числитель содержит свернутое произведение тензора поляризации  $e_{\mu\nu}$  с двумя импульсами (до и после) частицы, с которой он связан, это единственный физический тензор второго порядка, который может быть построен для скалярной частицы.

Ответы, которые мы получили, являются весьма близкими к тем, что имеют место при испускании фотона; существенное различие состоит в том, что взаимодействие в электромагнетизме осуществляется вектором, в то время как в гравитации тензором. Для быстро движущейся частицы  $v \approx c$ , так что знаменатель в соотношении (16.4.1) может быть очень мал и амплитуда может становиться очень большой вблизи  $\theta \approx 0$ . С другой стороны, тензор поляризации всегда поперечен к импульсу гравитона. В электромагнетизме вектор поляризации также поперечен импульсу фотона; существует только одно скалярное произведение в числителе, так что когда величина  $\theta$  мала и  $v \approx c$ ,

$$a_{e.m.} \rightarrow \frac{p \cdot e}{1 - v \cos \theta} \propto \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \approx \frac{2}{\theta}. \quad (16.4.2)$$

Излучение фотона может быть очень большим для малых углов. На самом деле взрыва не происходит, поскольку величина  $v$  никогда не бывает в точности равной  $c$ . Диаграмма направленности, соответствующая одиночной

частице, имеет две полости, как показано на рис. 16.6. В гравитации взаимодействие осуществляется тензорным полем и таким образом является вдвое трансверсальным; в пределе  $\theta \rightarrow 0$  и  $v = 1$ ,

$$a_g \rightarrow \frac{p \cdot e \cdot p}{1 - v \cos \theta} \propto \frac{\sin^2 \theta}{1 - v \cos \theta} \approx 2, \quad (16.4.3)$$

так что диаграмма направленности не направлена строго вперед, но в целом более однородна по сравнению с электромагнетизмом (рис. 16.6 (б)). Это различие может быть замечено интуитивно, будучи следствием того факта, что при формировании излучения спин два требует больше "трансверсальности", чем спин, равный единице.

Имеется одна амплитуда с угловой структурой такой же, как и на рис. 16.6(б), в окрестности каждого из четырех направлений частиц в задаче рассеяния. Интенсивность испускания гравитона является квадратом суммы четырех амплитуд, так что в общем случае это выражение выглядит достаточно симметричным образом.

Для медленно движущихся частиц  $v \ll c$  знаменатель не играет существенной роли, и диаграмма направленности определяется исключительно числителем. Эта величина может быть выражена как свернутое произведение двух тензоров

$$\sum_i (-)^i p \cdot e \cdot i v = e^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = x, y, z,$$

$$S_{\alpha\beta} = \sum_i (-)_i p_\alpha v_\beta. \quad (16.4.4)$$

Характер излучения полностью определяется тензором  $S_{\alpha\beta}$ , который представляет давление, производимое при столкновении. Мы узнаем, что форма этого выражения в точности аналогична форме давления в движущейся жидкости

$$\text{Давление} = \rho v_\alpha v_\beta, \quad (\rho = \text{плотность массы}). \quad (16.4.5)$$

Если мы имеем столкновение между двумя частицами, давление  $S_{\alpha\beta}$  имеет простое выражение на языке средних скоростей (до и после) сталкивающихся частиц. Мы положим передачу импульса равной  $Q = p_2 - p_1 = -p_4 + p_3$  (см. рис. 16.5). Запишем средние скорости

$$v = (p_2 + p_1)/2m, \quad v' = (p_3 + p_4)/2m'. \quad (16.4.6)$$

На языке этих комбинаций может быть легко показано после соответствующей симметризации, что

$$S_{\alpha\beta} = 2(v' - v)_\alpha Q_\beta. \quad (16.4.7)$$

С помощью этой формулы мы можем теперь ответить на интересный вопрос: при столкновении между легкой и тяжелой частицами, какая из них

дает наибольший вклад в излучение? Приведенная формула говорит нам, что если  $v' \ll v$ , излучение зависит только от  $v$ . При рассмотрении излучения от скользящих столкновений очень легкой частицы с массивным объектом, мы теперь знаем наверняка, что разрешено рассматривать массивную частицу, как всегда находящуюся в покое. Это правило работает при условии, что ускорение почти перпендикулярно скорости так, что  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} \approx 0$ .

Эта формула применяется здесь и для упругих, и для неупругих столкновений, которые могут оставлять одну или обе массы в возбужденном состоянии.

### 16.5. Источники классических гравитационных волн

Теперь мы переходим к описанию классического гравитационного излучения. Так же, как в квантово-механическом случае, мы найдем, что излучателем гравитационных волн также является давление. Исходная точка в нашем обсуждении есть дифференциальное уравнение

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = \lambda S_{\mu\nu}. \quad (16.5.1)$$

Это решение продолжается в точности также, как и в электродинамике, для решений векторных потенциалов, создаваемых произвольными токами. Если мы предполагаем гармоническое изменение от времени, такое как  $\exp(-i\omega t)$ , для всех величин, то векторный потенциал задается соотношением:

$$A_\mu(1) = \int dV_2 \frac{j_\mu(2) \cdot \exp(i\omega r_{12})}{4\pi r_{12}}, \quad (16.5.2)$$

где индексы 1 и 2 относятся к различным пространственным положениям; (1) есть место, в котором мы вычисляем потенциалы  $A_\mu$ , (2) есть места, где находятся токи, и  $r_{12}$  – расстояние между этими точками. Один из наиболее простейших случаев излучения соответствует осциллирующему диполю такому, что токи ограничиваются небольшой областью пространства. Довольно непосредственными выкладками проводим вычисления пространственных компонент  $A_x, A_y, A_z$ ; временной компонент или скалярный потенциал наиболее легко получается из дивергентного условия на  $A_\mu$

$$A^\mu{}_{,\mu} = 0 \rightarrow i\omega A_t = \nabla \cdot \mathbf{A}. \quad (16.5.3)$$

Эта ситуация в точности аналогична той, которая имеет место в гравитации. Временные части полей  $\bar{h}_{\mu\nu}$  наиболее легко получаются из дивергентных условий после вычислений пространственных частей по следующему правилу:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(1) = -\frac{\lambda}{4\pi} \int dV_2 S_{\mu\nu}(2) \frac{\exp(i\omega r_{12})}{r_{12}}. \quad (16.5.4)$$

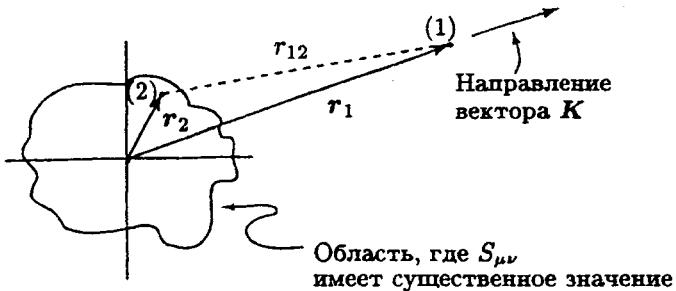


Рис. 16.7.

Для того, чтобы вычислить такие величины, как мощность излучаемых гравитационных волн, мы рассмотрим точку (1), расположенную достаточно далеко от системы, на некотором расстоянии, которое много больше, чем размеры области, где, как ожидается, величина  $S_{\mu\nu}(2)$  является достаточно большой, как это показано на рис. 16.7. Мы можем разложить расстояние  $r_{12}$ , как степенные ряды от радиальных расстояний точек (1) и (2) от некоторого начала координат вблизи точки (2), и мы находим, что

$$\begin{aligned} r_{12} &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta} = r_1 \sqrt{1 - (2r_2/r_1) \cos \theta + \dots} \\ &\approx r_1 - r_2 \cos \theta + \dots, \end{aligned} \quad (16.5.5)$$

когда  $r_2 \ll r_1$ . Здесь  $\cos \theta$  – косинус угла между векторами  $r_2$  и  $r_1$ . Так как любые волны, наблюдаемые в точке (1), будут иметь вектор импульса, направленный вдоль  $r_1$ , мы получаем следующее выражение для  $\bar{h}_{\mu\nu}(1)$

$$\bar{h}_{\mu\nu}(1) = -\frac{\lambda}{4\pi r_1} \exp(i\omega r_1) \int d^3 r_2 S_{\mu\nu}(2) \exp(-iK \cdot r_2). \quad (16.5.6)$$

Интеграл, появляющийся в соотношении (16.5.6), теперь не зависит от точки (1), мы видим, что тензор давления  $S_{\mu\nu}(2)$  является источником сферических волн.

В случае электромагнетизма наипростейшие случаи излучения часто соответствуют дипольному приближению, которое представляет собой первый ненулевой член в последовательности интегралов, соответствующих разложению экспоненты. Поскольку источник гравитационных волн является тензором вместо того, чтобы быть вектором (как в случае электромагнетизма), первый ненулевой член в гравитации имеет квадрупольный характер. Использование этого разложения оказывается оправданным, если частоты такие, что  $K \cdot r_2$  много меньше, чем 1, в области, где величина  $S_{\mu\nu}$  оказывается значимой. Для всех вращающихся масс таких, как двойные звезды или системы типа звезда – планета, периоды движения (скажем,  $\sim 1$  год для системы Земля – Солнце) много больше, чем время, которое требуется гравитации для того, чтобы пройти расстояние порядка размера системы ( $\sim 16$  минут для системы Земля – Солнце), так что члены разложения очень быстро становятся все меньше и меньше. Таким

образом, почти во всех случаях, представляющих астрономический интерес, длины волн много больше, чем размеры объекта. Результат состоит в том, что поля  $\bar{h}_{\mu\nu}$  пропорциональны интегралам поперечных давлений (полное поперечное давление)

$$\bar{h}_{ab} = -\lambda \frac{\exp(i\omega r)}{4\pi R} S_{ab}, \quad \text{где } S_{ab} = \int d^3r S_{ab}(r). \quad (16.5.7)$$

Значения давления в направлении *вдоль* волнового вектора не относятся к делу. Любое качественное правило, которое полезно в электромагнетизме, целиком переносится в гравитацию.

Какова мощность, испускаемая такой волной? Существует огромное количество специалистов, которые в силу многолетнего предрассудка, что гравитация является чем-то таинственным и отличным от всего остального, напрасно обеспокоены этим вопросом; они считают, что гравитационные волны не переносят энергии совсем. Мы можем определенно показать, что гравитационные волны могут на самом деле нагреть стенку, так что нет вопроса об энергосодержании в гравитационных волнах. Эта ситуация в точности аналогична той, которая имеет место в электромагнетизме, и в квантовой интерпретации каждый испускаемый гравитон уносит величину энергии  $\hbar\omega$ .