I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Начинающий ... не должен смущаться, если ... он обнаружит, что у него не хватает предварительных знаний даже для чтения предварительных сведений.

П. ХАЛМОШ

1.1. Множества и функции

Мы предполагаем, что читатель знаком с множествами и функциями, но думаем не будет лишним сразу же установить определенную терминологию и ввести обозначения, которыми мы будем пользоваться далее на протяжении всей книги.

Пусть X — некоторое множество; запись $x \in X$ означает, что x есть элемент множества X, а запись $x \notin X$ — что x не лежит во множестве X. Вместо высказывания «для всех x из X» мы пишем $(\forall x \in X)$, а вместо выражения «существует такое $x \in X$, что» — $(\exists x \in X)$. Символом $\{x \mid P(x)\}$ обозначается множество всех $x \in X$, удовлетворяющих условию (или условиям) $P(x)$. Если A — подмножество множества X (обозначается $A \subset X$), то $X \setminus A$ представляет собой дополнение подмножества A до множества X, т. е. $X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}$. Вообще если A и B — подмножества одного и того же множества X, то $A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A, x \notin B\}$. В случаях, когда мы рассматриваем множества, снабженные топологиями, под $\bar{A}$ всегда подразумевается замыкание множества A. Наконец, множество упорядоченных пар $\{\langle x, y\rangle \mid x \in X, y \in Y\}$ называется **декартовым произведением** множеств X и Y и обозначается $X \times Y$.

Словами «функция» и «отображение» мы пользуемся как синонимами. Для того чтобы подчеркнуть, что некоторая функция f зависит от двух переменных, мы будем иногда писать $f(\cdot, \cdot)$. Тогда символ $f(\cdot, y)$ обозначает функцию одной переменной, получаемую из $f(\cdot, \cdot)$ при фиксированном значении y второй переменной. Линейная функция иначе будет называться **оператором**, или **линейным преобразованием**. Все рассматриваемые нами функции всегда будут однозначными: функция из множества X в другое множество Y, обозначаемая любым из способов $f\colon X \to Y$, $X \xrightarrow{f} Y$ или $x \mapsto f(x)$, на каждом элементе $x \in X$ принимает одно и только одно значение из множества Y. Если $A \subset X$, то $f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$ есть подмножество в Y, а если $B \subset Y$, то $f^{-1}[B] = \{x \mid f(x) \in B\}$ — подмножество в X. Множество $f[X]$ мы будем называть **областью значений** функции f и обозначать символом

$\mathrm{Ran}\, f$. Множество X называется **областью определения** функции f. Функцию f назовем **инъективной** (или взаимно однозначной), если для каждого элемента $y \in \mathrm{Ran}\, f$ существует не более одного элемента $x \in X$, такого, что $f(x) = y$; **сюръективной** (или отображением на), если $\mathrm{Ran}\, f = Y$; **биективной** (или просто биекцией), если она одновременно и инъективна и сюръективна. Сужение функции f на подмножество A ее области определения будем обозначать через $f \restriction A$.

Если $X \supset A$, то **характеристическую функцию** $\chi_A(x)$ мы определим формулой

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

В дальнейшем нам понадобятся два теоретико-множественных понятия, несколько более содержательных, чем простые обозначения. Обсудим их чуть подробнее. Назовем **отношением** R на множестве X любое подмножество R декартова произведения $X \times X$; если $\langle x, y \rangle \in R$, то будем говорить, что элемент x находится в отношении R (или в R-отношении) к элементу y, и писать xRy.

Определение. Отношение R называется **отношением эквивалентности**, если оно удовлетворяет следующим требованиям:

(i) $(\forall x \in X)\, xRx$ (рефлексивность);
(ii) $(\forall x, y \in X)$ из xRy следует yRx (симметричность);
(iii) $(\forall x, y, z \in X)$ из xRy, yRz следует xRz (транзитивность).

Множество элементов из X, находящихся в R-отношении к заданному элементу $x \in X$, называется **классом эквивалентности** элемента x и обозначается $[x]$.

Легко доказать, что справедлива

Теорема I.1. Пусть R — отношение эквивалентности на X. Тогда каждый элемент $x \in X$ принадлежит единственному классу эквивалентности.

Таким образом, отношение эквивалентности естественным способом разбивает множество на непересекающиеся подмножества:

Пример 1 (целые числа по модулю 3). Пусть Z — множество целых чисел. Будем писать xRy, если разность $x - y$ кратна трем. Это отношение эквивалентности разбивает Z на три класса эквивалентности:

$$[0] = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\},$$
$$[1] = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\},$$
$$[2] = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}.$$

Пример 2 (вещественная проективная прямая). Пусть $\mathbb{R}$ — вещественная прямая и X — множество ненулевых векторов в пространстве $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Для $x, y \in X$ будем писать xRy, если существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $x = \alpha y$. Классы эквивалентности представляют собой проходящие через начало прямые (из которых выколота точка $\langle 0, 0 \rangle$).

Обратимся теперь к обсуждению леммы Цорна.

Определение. Отношение R на множестве X, обладающее свойствами рефлексивности, транзитивности и антисимметричности (последнее означает, что xRy и yRx влекут за собой равенство $x = y$), называется **отношением частичного упорядочения** (или просто частичным упорядочением). Если R — частичное упорядочение, то иногда вместо xRy мы будем писать $x \prec y$.

Пример 3. Пусть X — набор всех подмножеств фиксированного множества Y. Будем писать $A \prec B$, коль скоро $A \subset B$. Так определенное отношение $\prec$ задает частичное упорядочение.

Слово «частичный» в данном выше определении употреблено по той причине, что два элемента множества X не обязаны находиться ни в отношении $x \prec y$, ни в отношении $y \prec x$. Если же для всех x и y из X или $x \prec y$, или $y \prec x$, то множество X называется **линейно упорядоченным**. Например, вещественная прямая $\mathbb{R}$ линейно упорядочена обычным отношением $\leqslant$.

Предположим теперь, что множество X частично упорядочено отношением $\prec$ и $Y \subset X$. Элемент $p \in X$ называется **верхней гранью** множества Y, если $y \prec p$ для всех $y \in Y$. Если условия $m \in X$, $m \prec x$ ведут к тому, что $x = m$, то m называется **максимальным элементом** множества X.

Лемму Цорна, в зависимости от точки зрения, можно либо рассматривать как основополагающее предположение теории множеств, либо выводить из других основных постулатов (она, в частности, эквивалентна *аксиоме* выбора). Мы придерживаемся первой точки зрения как на лемму Цорна, так и на остальные факты теории множеств.

Теорема I.2 (лемма Цорна). Пусть X — непустое частично упорядоченное множество, такое, что каждое его линейно упорядоченное подмножество имеет в X верхнюю грань. Тогда каждое линейно упорядоченное множество в X обладает некоторой верхней гранью, которая является в то же время максимальным элементом в X.

Отметим, наконец, что мы будем пользоваться символом Халмоша ▮ для обозначения конца доказательства.