I.2. Метрические и нормированные линейные пространства

На протяжении всей этой книги мы будем иметь дело с разнообразными множествами функций, операторов или других объектов и часто будем сталкиваться с необходимостью как-то измерять расстояние между элементами рассматриваемого множества. По этой причине разумно ввести обобщение понятия расстояния, обладающее наиболее важными свойствами обычного расстояния в $\mathbb{R}^3$.

Определение. **Метрическое пространство** — это множество M вместе с вещественнозначной функцией $d(\cdot, \cdot)$, определенной на $M \times M$ и удовлетворяющей следующим требованиям:

(i) $d(x, y) \geqslant 0$;
(ii) $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
(iii) $d(x, y) = d(y, x)$;
(iv) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ [неравенство треугольника].

Функция d называется **метрикой** на M.

Элементы метрического пространства мы часто будем называть точками. Подчеркнем, что метрическое пространство представляет собой пару, состоящую из множества M и метрики d; в общем случае данное множество X можно превратить в различные метрические пространства, задавая на $X \times X$ различные метрики. В случаях, когда из контекста не ясно, о какой именно метрике идет речь, мы будем указывать ее явно, обозначая метрическое пространство символом $\langle M, d \rangle$.

Пример 1. Пусть $M = \mathbb{R}^n$. Евклидово расстояние между точками $x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ и $y = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle$ задается функцией

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Пример 2. Пусть M — единичная окружность в $\mathbb{R}^2$, т. е. множество всех пар вещественных чисел $\langle \alpha, \beta \rangle$, таких, что $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Одна из возможных метрик на окружности такова:

$$d_1(\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \alpha', \beta' \rangle) = \sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2}.$$

Другая возможная метрика получится, если положить $d_2(p, p')$ равным длине меньшей дуги, соединяющей точки p и p' (рис. I.1).

Пример 3. Пусть $M = C[0, 1]$ — множество непрерывных вещественнозначных функций, определенных на отрезке $[0, 1]$. Любая из двух метрик

$$d_1(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|, \qquad d_2(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx,$$

превращает M в метрическое пространство.

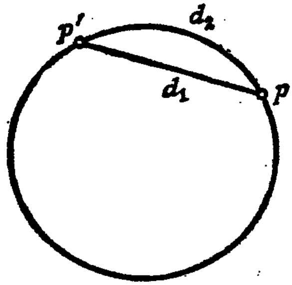

Рис. I.1. Метрики d_1 и d_2.

Теперь, когда мы располагаем понятием расстояния, можно говорить о сходимости.

Определение. Говорят, что последовательность элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ метрического пространства $\langle M, d\rangle$ **сходится** к элементу $x \in M$, если $d(x, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Мы часто будем записывать это в виде $x_n \xrightarrow{d} x$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Если x_n не сходится к x, мы будем писать $x_n \overset{d}{\not\to} x$.

В примере 2 мы имеем $d_1(p, p') \leqslant d_2(p, p') \leqslant \pi d_1(p, p')$, или кратко $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \pi d_1$. Это приводит к тому, что $p_n \xrightarrow{d_1} p$ тогда и только тогда, когда $p_n \xrightarrow{d_2} p$. Однако в примере 3 разные метрики порождают разные понятия сходимости, и, поскольку $d_2 \leqslant d_1$, сходимость по метрике d_1 влечет за собой сходимость по метрике d_2, но обратное не верно. Примером служит последовательность функций g_n, изображенных на рис. I.2, которая сходится к нулю по метрике d_2, но не сходится по метрике d_1. В этом легко убедиться при помощи важного понятия последовательности Коши.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства $\langle M, d\rangle$ называется **последовательностью Коши**, если $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N)$ из $n, m \geqslant N$ следует $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Предложение. Любая сходящаяся последовательность есть последовательность Коши.

Доказательство. Пусть $x_n \to x$ и $\varepsilon > 0$. Найдем такое N, что $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ при $n \geqslant N$. Тогда при $n, m \geqslant N$ получим $d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x) + d(x, x_m) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$. ∎

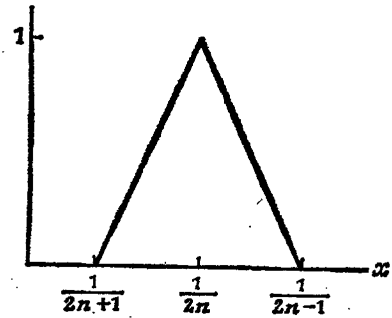

Рис. I.2. График $g_n(x)$.

Вернемся теперь к функциям, изображенным на рис. I.2. Легко видеть, что при $n \neq m$ расстояние $d_1(g_n, g_m) = 1$, так что g_n не есть последовательность Коши в $\langle C[0, 1], d_1 \rangle$ и, следовательно, не может сходиться по метрике d_1. Итак, последовательность $\{g_n\}$ сходится в пространстве $\langle C[0, 1], d_2 \rangle$, но не сходится в $\langle C[0, 1], d_1 \rangle$.

Хотя, как мы видели, каждая сходящаяся последовательность есть последовательность Коши, следующий пример показывает, что обратное не верно. Пусть $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел с обычной метрикой (т. е. $d(x, y) = |x - y|$), и пусть x^* — любое иррациональное число (т. е. $x^* \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Найдем последовательность рациональных чисел x_n, сходящуюся в $\mathbb{R}$ к x^*. Тогда x_n — последовательность Коши в $\mathbb{Q}$, но она не может сходиться в $\mathbb{Q}$ ни к какому рациональному числу y (ибо если бы $x_n \to y$ в $\mathbb{Q}$, то $x_n \to y$ в $\mathbb{R}$, и мы имели бы $y = x^*$).

Определение. Метрическое пространство, в котором любая последовательность Коши сходится, называется **полным.**

Например, $\mathbb{R}$ — полное метрическое пространство, а $\mathbb{Q}$ — нет. Можно доказать (см. § I.3 и I.5), что пространство $\langle C[0, 1], d_1 \rangle$ — полное, а пространство $\langle C[0, 1], d_2 \rangle$ — нет.

Пример с пространствами $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ подсказывает, что нужно сделать, чтобы неполное метрическое пространство X превратить в полное. Нужно просто расширить пространство X, добавив к нему «все возможные пределы последовательностей Коши». Исходное пространство X в таком случае будет плотным в объемлющем пространстве $\bar{X}$ в смысле следующего определения.

Определение. Множество B называется **плотным** в метрическом пространстве M, если любой элемент $m \in M$ является пределом последовательности элементов из B.

Конечно, если заранее не известно большее полное пространство, содержащее исходное неполное пространство (в отличие от случая $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$), то неясно и каковы «все возможные пределы последовательностей Коши». Тот факт, что «пополнение» все же возможно, составляет содержание теоремы, которую мы вскоре сформулируем, но сначала дадим несколько определений.

Определение. Функция f из метрического пространства $\langle X, d\rangle$ в метрическое пространство $\langle Y, \rho\rangle$ называется **непрерывной в точке** x, если $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x)$, когда $x_n \xrightarrow{d} x$.

Мы уже встречались с примером последовательности элементов f_n в пространстве $C[0, 1]$, такой, что $f_n \xrightarrow{d_2} 0$, но $f_n \not\xrightarrow{d_1} 0$. Это, в частности, означает, что тождественное отображение пространства $\langle C[0, 1], d_2\rangle$ в пространство $\langle C[0, 1], d_1\rangle$ *не* непрерывно, но тождественное отображение из $\langle C[0, 1], d_1\rangle$ в $\langle C[0, 1], d_2\rangle$ непрерывно.

Определение. Биекция h из $\langle X, d\rangle$ в $\langle Y, \rho\rangle$, сохраняющая метрику, т. е. такая, что

$$\rho(h(x), h(y)) = d(x, y),$$

называется **изометрией**. Она автоматически непрерывна. Если такая изометрия существует, то говорят, что пространства $\langle X, d\rangle$ и $\langle Y, \rho\rangle$ **изометричны**.

Изометричные пространства неразличимы по своим метрическим свойствам; любая теорема, касающаяся только метрической структуры пространства $\langle X, d\rangle$, будет выполняться и во всех изометричных ему пространствах.

Теперь мы точно сформулируем, в каком смысле неполное пространство может быть расширено до полного.

Теорема I.3. Если $\langle M, d\rangle$ — неполное метрическое пространство, то существует полное метрическое пространство $\tilde{M}$, такое, что M изометрично плотному подмножеству в $\tilde{M}$.

Набросок доказательства. Рассмотрим последовательности Коши $\{x_n\}$ элементов из M. Назовем две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_m\}$ эквивалентными, если $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Пусть $\tilde{M}$ — семейство классов эквивалентных последовательностей Коши. Можно показать, что для любых двух последовательностей Коши $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ существует и зависит только от классов эквивалентности этих последовательностей. Этот предел определяет метрику на $\tilde{M}$, в которой $\tilde{M}$ оказывается полным метрическим пространством. Наконец, отобразим M в $\tilde{M}$, сопоставляя каждому элементу x постоянную последовательность $\{x_n = x\}$. Легко убедиться в том, что такое отображение h плотно вкладывает M в $\tilde{M}$ и является изометрией. ∎

Завершая наше обсуждение метрических пространств, мы хотим ввести еще два понятия — определить открытые и замкнутые множества. В качестве образца читателю следует при этом иметь в виду открытые и замкнутые множества на вещественной прямой.

Определение. Пусть $\langle X, d\rangle$ — метрическое пространство.

(a) Множество $\{x \mid x \in X, d(x, y) < r\}$ называется **открытым шаром** $B(y; r)$ радиуса r с центром в точке y.

(b) Множество $O \subset X$ называется **открытым**, если $(\forall y \in O)(\exists r > 0)\, B(y; r) \subset O$.

(c) Множество $N \subset X$ называется **окрестностью** точки $y \in N$, если $B(y; r) \subset N$ при некотором $r > 0$.

(d) Пусть $E \subset X$. Точка x называется **предельной точкой** множества E, если $(\forall r > 0)\, B(x; r) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \varnothing$. Иначе говоря, x — предельная точка множества E, если E содержит точки, *отличные от* x, но сколь угодно близкие к x.

(e) Множество $F \subset X$ называется **замкнутым**, если F содержит все свои предельные точки.

(f) Пусть $G \subset X$; точка $x \in G$ называется **внутренней точкой** множества G, если G — окрестность точки x.

Для себя читатель может самостоятельно доказать следующий набор элементарных утверждений:

Теорема I.4. Пусть $\langle X, d\rangle$ — метрическое пространство.

(a) Множество O открыто тогда и только тогда, когда множество $X \setminus O$ замкнуто.

(b) $x_m \xrightarrow{d} x$ тогда и только тогда, когда для каждой окрестности N точки x существует натуральное число M, такое, что $x_m \in N$ для всех $m \geqslant M$.

(c) Множество внутренних точек любого множества открыто.

(d) Объединение множества с семейством всех его предельных точек замкнуто.

(e) Множество O открыто тогда и только тогда, когда оно является окрестностью каждой своей точки.

Одно из главных применений открытых множеств — проверка с их помощью сходимости на основе свойства (b) в теореме I.4, в частности проверка непрерывности функции с помощью следующего критерия, доказательство которого мы оставляем читателю в качестве упражнения:

Теорема I.5. Функция $f(\cdot)$ из метрического пространства X в метрическое пространство Y непрерывна тогда и только тогда, когда для каждого открытого множества $O \subset Y$ множество $f^{-1}[O]$ открыто в X.

Наконец, мы хотим предостеречь читателя, что в неполном метрическом пространстве замкнутые множества часто на первый взгляд могут показаться незамкнутыми. Например, множество $[1/2, 1)$ в пространстве $(0, 1)$ с обычной метрикой замкнуто.

Мы завершим этот раздел обсуждением двух центральных понятий функционального анализа: нормированных линейных пространств и ограниченных линейных преобразований.

Определение. **Нормированное линейное пространство** — это векторное пространство V над полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) вместе с функцией $\|\cdot\|$ из V в $\mathbb{R}$ **(нормой)**, удовлетворяющей условиям:

(i) $\|v\| \geqslant 0$ для всех v из V;
(ii) $\|v\| = 0$ тогда и только тогда, когда $v = 0$;
(iii) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ для всех v из V и α из $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$);
(iv) $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$ для всех v и w из V.

Определение. **Ограниченное линейное преобразование** (ограниченный оператор) из нормированного линейного пространства $\langle V_1, \|\cdot\|_1\rangle$ в нормированное линейное пространство $\langle V_2, \|\cdot\|_2\rangle$ — это функция T из V_1 в V_2, удовлетворяющая условиям:

(i) $T(\alpha v + \beta w) = \alpha T(v) + \beta T(w)$ $(\forall v, w \in V)$ $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C})$;
(ii) $\|Tv\|_2 \leqslant C\|v\|_1$ при некоторой константе $C \geqslant 0$, не зависящей от выбора $v \in V$.

Наименьшее из таких чисел C называется **нормой оператора** T и обозначается через $\|T\|$, или $\|T\|_{1,2}$. Таким образом,

$$\|T\| = \sup_{\|v\|_1 = 1} \|Tv\|_2.$$

Поскольку ниже мы подробно изучаем эти понятия, мы не будем приводить здесь много примеров, а отметим только, что $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|\langle x_1, \ldots, x_n\rangle\| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$$

и $C[0, 1]$ с любой из норм

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \quad \text{или} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

являются нормированными линейными пространствами. Отметим также, что любое нормированное линейное пространство $\langle V, \|\cdot\|\rangle$ есть метрическое пространство с расстоянием, заданным функцией $d(v, w) = \|v - w\|$. Таким образом, в $\langle V, \|\cdot\|\rangle$ переносится понятие непрерывных функций, которое в случае линейных функций реализуется ограниченными линейными преобразованиями. Доказательство этого факта мы оставляем читателю.

Теорема I.6. Пусть T — линейное преобразование между двумя нормированными линейными пространствами. Следующие условия эквивалентны:

(a) T непрерывно в одной точке;
(b) T непрерывно во всех точках;
(c) T ограничено.

Определение. Будем говорить, что пространство $\langle V, \|\cdot\|\rangle$ **полно**, если оно полно как метрическое пространство в метрике, индуцированной нормой.

Если $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ — нормированное линейное пространство, то X как метрическое пространство по теореме I.3 имеет пополнение. Используя факт плотности X в $\tilde{X}$, легко увидеть, что $\tilde{X}$ только одним естественным способом можно превратить в нормированное линейное пространство. Все сказанное прекрасно иллюстрируется следующей важной теоремой и ее доказательством.

Теорема I.7 (об ограниченном линейном отображении). Пусть T — ограниченное линейное преобразование из нормированного линейного пространства $\langle V_1, \|\cdot\|_1\rangle$ в полное нормированное линейное пространство $\langle V_2, \|\cdot\|_2\rangle$. Тогда T единственным образом может быть расширено до ограниченного линейного преобразования (с прежней нормой) $\tilde{T}$ из пополнения пространства V_1 в $\langle V_2, \|\cdot\|_2\rangle$.

Доказательство. Пусть $\tilde{V}_1$ — пополнение V_1. Для каждого x из $\tilde{V}_1$ существует последовательность $\{x_n\}$ элементов из V_1, такая, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Поскольку $\{x_n\}$ сходится, она является последовательностью Коши, и поэтому для заданного ε можно найти такое N, что $\|x_n - x_m\|_1 \leqslant \varepsilon / \|T\|$, если $n, m > N$. Тогда оценка $\|Tx_n - Tx_m\|_2 = \|T(x_n - x_m)\|_2 \leqslant \|T\| \|x_n - x_m\|_1 \leqslant \varepsilon$ доказывает, что $\{Tx_n\}$ — последовательность Коши в V_2. Так как V_2 полно, то Tx_n сходится к некоторому $y \in V_2$. Положим $\tilde{T}x = y$. Прежде всего нужно доказать, что это определение не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x. Если $x_n \to x$ и $x'_n \to x$, то последовательность $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots \to x$, и в силу уже приведенных аргументов $Tx_1, Tx'_1, \ldots \to \hat{y}$ для некоторого $\hat{y}$. Но в таком случае $\lim\limits_{n\to\infty} Tx'_n = \hat{y} = \lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = y$. Более того, можно показать, что определенный так оператор $\tilde{T}$ ограничен, ибо

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{T}x\|_2 &= \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\|_2 \leqslant && \text{(см. задачу 8)} \\
&\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, C \|x_n\|_1 = && \text{(см. дополнение к § I.2)} \\
&= C\|x\|_1.
\end{aligned}
$$

Доказательство линейности и единственности мы оставляем читателю. ▮

С помощью доказанной теоремы можно дать весьма элегантное определение интеграла Римана. Пусть $PC[a, b]$ — семейство ограниченных, непрерывных справа (т. е. таких, что $\lim\limits_{x \downarrow y} f(x) = f(y)$), кусочно-непрерывных функций на $[a, b]$, обладающих тем свойством, что $\lim\limits_{x \uparrow y} f(x)$ существует для всех y и равен $f(y)$ для всех y, кроме конечного числа. Наделим $PC[a, b]$ нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Пусть $x_0, \ldots, x_n$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $x_0 = a$, $x_n = b$. Пусть $\chi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, — характеристическая функция полуинтервала $[x_{i-1}, x_i)$, а $\chi_n(x)$ — характеристическая функция отрезка $[x_{n-1}, x_n]$. Функцию на $[a, b]$ вида $\sum\limits_{i=1}^{n} s_i\chi_i(x)$ с вещественными s_i называют **ступенчатой функцией** (чтобы понять почему — нарисуйте график). Множество всех ступенчатых функций для всех возможных конечных разбиений является нормированным линейным пространством с нормой

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} s_i\chi_i(x) \right\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} \left| \sum s_i\chi_i(x) \right| = \max_{i=1, \ldots, n} |s_i|.$$

Обозначим это пространство через $S[a, b]$. Хорошее упражнение (задача 10) — доказать, что $S[a, b]$ плотно в $PC[a, b]$. Для любой ступенчатой функции $\sum\limits_{i=1}^{n} s_i\chi_i$ в согласии с интуитивным пониманием интеграла $\int [\sum s_i\chi_i(x)]\, dx$ мы полагаем по определению

$$I\left(\sum_{i=1}^{n} s_i\chi_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} s_i(x_i - x_{i-1}).$$

Тогда I — линейное преобразование из $S[a, b]$ во множество вещественных чисел, а из оценки

$$\left| I\left(\sum_{i=1}^{n} s_i\chi_i\right)\right| = \left|\sum s_i(x_i - x_{i-1})\right| \leqslant \max|s_i| \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| \leqslant$$
$$\leqslant \left\|\sum s_i\chi_i\right\|_\infty (b-a)$$

видно, что I — *ограниченное* линейное преобразование. Поскольку множество вещественных чисел полно, I можно однозначно продолжить на $\tilde{S}$ — пополнение S (теорема I.7). Это расширение, суженное на $PC[a, b]$, называется интегралом Римана и обозначается

$$I(f) = \int_a^b f\,dx.$$

Несмотря на то что этот способ не выглядит наиболее прямой реализацией интуитивного определения интеграла Римана, поразмыслив, можно понять, что проведенное построение на самом деле представляет собой перевод «обычной» конструкции на язык пополнения и теоремы об ограниченном линейном отображении. Оно иллюстрирует суть общего подхода функционального анализа: для того чтобы определить что-то на нормированном линейном пространстве, часто удобно определить нужный объект на плотном множестве и продолжить его с помощью теоремы об ограниченном линейном отображении. Читателю следовало бы попробовать свои силы в построении интеграла Римана—Стильтьеса (задача 11). Используя такой же метод, можно определить интеграл Римана для непрерывных функций, принимающих значения в любом *полном* нормированном линейном пространстве, в частности для комплекснозначных функций.

Дополнение к § I.2. Верхний и нижний пределы

Понятия верхнего и нижнего пределов могут быть незнакомы читателю, поэтому мы приводим здесь их определения и основные свойства.

Определение. Пусть $A \subset \mathbb{R}$—бесконечное ограниченное множество. Пусть $\lim\mathrm{pt}(A) = \{$совокупность предельных точек множества $A\}$. Тогда **верхний предел** множества A определяется так:

$$\limsup A = \overline{\lim}\, A = \sup\{x \mid x \in \lim\mathrm{pt}(A)\}.$$

Аналогично нижний предел равен

$$\liminf A = \underline{\lim}\, A = \inf\{x \mid x \in \lim\mathrm{pt}(A)\}.$$

Замечания. 1. Когда A ограничено, множество $\lim\mathrm{pt}(A)$ по теореме Больцано—Вейерштрасса всегда непусто.

2. Если A не ограничено сверху, мы полагаем $\overline{\lim}\, A = +\infty$. Если A ограничено сверху, но $\lim\mathrm{pt}(A) = \varnothing$, мы полагаем $\overline{\lim}\, A = -\infty$.

3. Фактически $\overline{\lim}\, A$ лежит в $\lim\mathrm{pt}(A)$. Действительно, пусть $b = \overline{\lim}\, A$, и пусть задано $\varepsilon > 0$. Можно найти такое $a \in \lim\mathrm{pt}(A)$, что $|b-a| < \varepsilon/2$. Поскольку $a \in \lim\mathrm{pt}(A)$, можно найти $d \in A$, для которого $|a-d| < \varepsilon/2$; в итоге по заданному ε найдено $d \in A$, для которого $|b-d| < \varepsilon$, так что $b \in \lim\mathrm{pt}(A)$.