суженное на $PC[a, b]$, называется интегралом Римана и обозначается

$$I(f) = \int_a^b f\,dx.$$

Несмотря на то что этот способ не выглядит наиболее прямой реализацией интуитивного определения интеграла Римана, поразмыслив, можно понять, что проведенное построение на самом деле представляет собой перевод «обычной» конструкции на язык пополнения и теоремы об ограниченном линейном отображении. Оно иллюстрирует суть общего подхода функционального анализа: для того чтобы определить что-то на нормированном линейном пространстве, часто удобно определить нужный объект на плотном множестве и продолжить его с помощью теоремы об ограниченном линейном отображении. Читателю следовало бы попробовать свои силы в построении интеграла Римана—Стильтьеса (задача 11). Используя такой же метод, можно определить интеграл Римана для непрерывных функций, принимающих значения в любом *полном* нормированном линейном пространстве, в частности для комплекснозначных функций.

Дополнение к § I.2. Верхний и нижний пределы

Понятия верхнего и нижнего пределов могут быть незнакомы читателю, поэтому мы приводим здесь их определения и основные свойства.

Определение. Пусть $A \subset \mathbb{R}$—бесконечное ограниченное множество. Пусть $\lim \mathrm{pt}(A) = \{$совокупность предельных точек множества $A\}$. Тогда **верхний предел** множества A определяется так:

$$\limsup A = \overline{\lim}\, A = \sup\{x \mid x \in \lim \mathrm{pt}(A)\}.$$

Аналогично нижний предел равен

$$\liminf A = \underline{\lim}\, A = \inf\{x \mid x \in \lim \mathrm{pt}(A)\}.$$

Замечания. 1. Когда A ограничено, множество $\lim \mathrm{pt}(A)$ по теореме Больцано—Вейерштрасса всегда непусто.

2. Если A не ограничено сверху, мы полагаем $\overline{\lim}\, A = +\infty$. Если A ограничено сверху, но $\lim \mathrm{pt}(A) = \varnothing$, мы полагаем $\overline{\lim}\, A = -\infty$.

3. Фактически $\overline{\lim}\, A$ лежит в $\lim \mathrm{pt}(A)$. Действительно, пусть $b = \overline{\lim}\, A$, и пусть задано $\varepsilon > 0$. Можно найти такое $a \in \lim \mathrm{pt}(A)$, что $|b - a| < \varepsilon/2$. Поскольку $a \in \lim \mathrm{pt}(A)$, можно найти $d \in A$, для которого $|a - d| < \varepsilon/2$; в итоге по заданному ε найдено $d \in A$, для которого $|b - d| < \varepsilon$, так что $b \in \lim \mathrm{pt}(A)$.

Верхний предел допускает другое весьма простое описание; доказательство мы оставляем читателю.

Предложение. Пусть $b=\overline{\lim}\,A$. Тогда для $\varepsilon>0$ множество $A\cap\{a\mid a>b+\varepsilon\}$ конечно, а $A\cap\{a\mid a>b-\varepsilon\}$ бесконечно.

В случае последовательности $\{a_n\}$ говорят, что $b\in\lim\operatorname{pt}\{a_n\}$, если для всех N и всех ε существует такое $n>N$, что $|b-a_n|<\varepsilon$; в этом случае полагают $\overline{\lim}\,a_n=\sup\{b\mid b\in\lim\operatorname{pt}\{a_n\}\}$.

Наконец, перечислим свойства $\overline{\lim}$ (сформулированные для ограниченных множеств; полезное упражнение—выяснить, какие из них переносятся на неограниченные множества).

Предложение.

(a) $\overline{\lim}\,(a_n+b_n)\leqslant\overline{\lim}\,a_n+\overline{\lim}\,b_n$;

(b) $\overline{\lim}\,a_nb_n\leqslant(\overline{\lim}\,a_n)(\overline{\lim}\,b_n)$, если $a_n,\ b_n\geqslant 0$;

(c) $\overline{\lim}\,(ca_n)=c\,\overline{\lim}\,a_n$, если $c>0$;

(d) $\overline{\lim}\,(ca_n)=c\,\underline{\lim}\,a_n$, если $c<0$.

I.3. Интеграл Лебега

Выше мы видели, что на $C[a,\ b]$ существуют две вполне естественные метрики. В § I.5 мы увидим, что $C[a,\ b]$ с метрикой

$$d_1(f,\ g)=\sup_{x\in[a,\ b]}|f(x)-g(x)|$$

является полным метрическим пространством. С другой рассмотренной нами метрикой $d_2(f,\ g)=\|f-g\|_1$, где $\|h\|_1=\int\limits_a^b|h(x)|\,dx$, пространство $C[a,\ b]$ *неполно*. Чтобы убедиться в этом на примере $C[0,\ 1]$, рассмотрим функцию f_n, изображенную на рис. I.3.

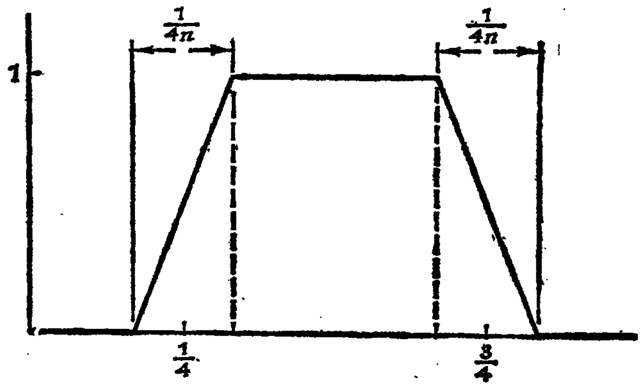

Рис. I.3. График f_n.