Верхний предел допускает другое весьма простое описание; доказательство мы оставляем читателю.

Предложение. Пусть $b=\overline{\lim} A$. Тогда для $\varepsilon>0$ множество $A\cap\{a \mid a>b+\varepsilon\}$ конечно, а $A\cap\{a \mid a>b-\varepsilon\}$ бесконечно.

В случае последовательности $\{a_n\}$ говорят, что $b\in \lim\mathrm{pt}\{a_n\}$, если для всех N и всех ε существует такое $n>N$, что $|b-a_n|<\varepsilon$; в этом случае полагают $\overline{\lim}\, a_n=\sup\{b \mid b\in\lim\mathrm{pt}\{a_n\}\}$.

Наконец, перечислим свойства $\overline{\lim}$ (сформулированные для ограниченных множеств; полезное упражнение—выяснить, какие из них переносятся на неограниченные множества).

Предложение.

(a) $\overline{\lim}\,(a_n+b_n)\leqslant\overline{\lim}\,a_n+\overline{\lim}\,b_n$;

(b) $\overline{\lim}\,a_nb_n\leqslant(\overline{\lim}\,a_n)(\overline{\lim}\,b_n)$, если $a_n, b_n\geqslant 0$;

(c) $\overline{\lim}\,(ca_n)=c\,\overline{\lim}\,a_n$, если $c>0$;

(d) $\overline{\lim}\,(ca_n)=c\,\underline{\lim}\,a_n$, если $c<0$.

I.3. Интеграл Лебега

Выше мы видели, что на $C[a, b]$ существуют две вполне естественные метрики. В § I.5 мы увидим, что $C[a, b]$ с метрикой

$$d_1(f, g)=\sup_{x\in[a, b]}|f(x)-g(x)|$$

является полным метрическим пространством. С другой рассмотренной нами метрикой $d_2(f, g)=\|f-g\|_1$, где $\|h\|_1=\int_a^b|h(x)|\,dx$, пространство $C[a, b]$ *неполно*. Чтобы убедиться в этом на примере $C[0, 1]$, рассмотрим функцию f_n, изображенную на рис. I.3.

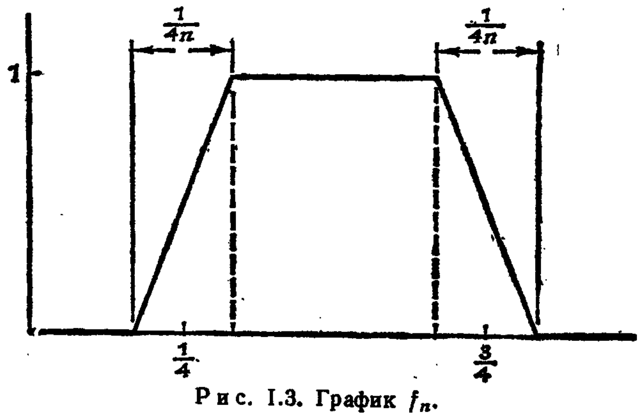

Рис. I.3. График f_n.

Нетрудно понять, что в метрике $\|\cdot\|_1$ такие функции f_n образуют последовательность Коши, которая, однако, не сходится ни к какой функции из $C[0, 1]$; напротив, в некоем *интуитивном смысле* она «сходится» к характеристической функции отрезка $[1/4, 3/4]$ (которая, конечно, не лежит в $C[0, 1]$!).

Пространство $C[a, b]$ с метрикой $\|\cdot\|_1$ всегда можно пополнить, реализуя элементы пополнения как классы эквивалентных последовательностей Коши непрерывных функций, но эта реализация отнюдь не отличается прозрачностью! Рассмотренный выше пример наводит на мысль попытаться реализовать элементы пополнения как функции. Если бы это удалось, мы сумели бы определить интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$ (просто как $d_1(f, 0)$!) для любой функции из пополнения.

Простейший путь такой реализации — попробовать действовать в обратном порядке. Введем расширенное понятие интеграла на большем, чем $C[a, b]$, пространстве — назовем его $L^1[a, b]$. Затем докажем полноту $L^1[a, b]$. Тогда в соответствии с общей теорией замыкание C в L^1 будет полным (причем окажется, что $\overline{C} = L^1$).

Как же можно расширить понятие интеграла Римана? В основе обычного определения риманова интеграла лежит разбиение *области определения* f на все более и более мелкие части. Для

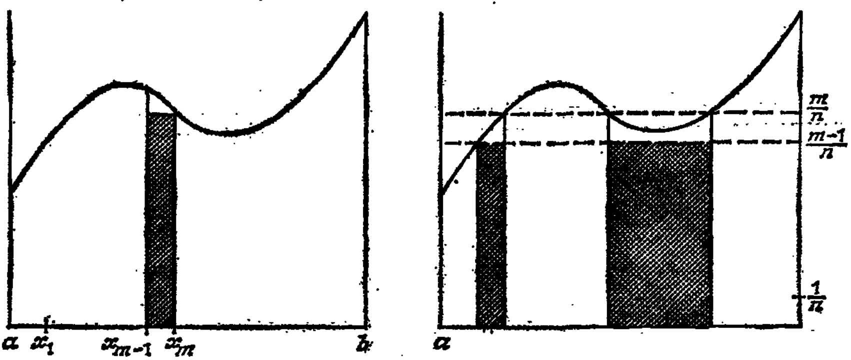

Рис. 1.4. Интеграл Римана (слева) и интеграл Лебега.

«скверных» функций этот метод не подходит. Простейшее усовершенствование состоит в делении на все более мелкие части области значений f (рис. 1.4). Такой метод чувствительнее к виду функций и потому в состоянии охватить большее их многообразие. Итак, мы интересуемся множествами вида $f^{-1}[a, b]$ и их размерами. Предположим, что у нас есть некая функция μ, задающая размер множеств и обобщающая функцию $\mu([a, b]) = b - a$.

Мы вскоре вернемся к этой функции и увидим, что не все множества обладают «размером». Поэтому мы ограничим тип функций f, требуя, чтобы множества $f^{-1}[a, b]$ имели «размеры». Глядя на рис. I.4, для $f \geqslant 0$ положим по определению

$$\Sigma_n(f) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{n} \mu\left(f^{-1}\left[\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right)\right]\right).$$

Тогда $\Sigma_{2n}(f) \geqslant \Sigma_n(f)$, так что $\lim\limits_{n\to\infty} \Sigma_{2^n}(f) = \sup\limits_n (\Sigma_{2^n}(f))$ существует (он может быть равен ∞). По определению мы полагаем $\int f\,dx$ равным этому пределу. Заметим, что для технических целей (т. е. для доказательства теорем!) принимается другое определение; оно эквивалентно данному, но доказать это нелегко. Однако при неформальных размышлениях лучше всегда иметь в виду определение с помощью $\lim \Sigma_{2^n}(f)$.

Итак, мы свели исходную задачу к проблеме расширения понятия размера. Прежде всего нужно решить, какие множества должны иметь размер. Почему не все? Существует классический пример (см. также задачу 13), который показывает, что размер не может быть определен для всех множеств в $\mathbb{R}^3$, если мы хотим, чтобы он был инвариантным относительно вращений и переносов (и не был тривиальным, например нулевым для всех множеств): можно разделить единичный шар на конечное число экзотических кусков, передвинуть эти куски с помощью вращений и переносов и, собрав их заново, получить два шара с единичным радиусом (парадокс Банаха—Тарского). Таким образом, все множества не могут обладать размером, и потому лишь некоторое их семейство $\mathscr{B}$ будет семейством «измеримых множеств». Какими же свойствами мы хотим наделить $\mathscr{B}$? Желательно, чтобы и $f^{-1}[[0, a)]$, и $f^{-1}[[a, \infty)]$ были измеримы ($f \geqslant 0$), следовательно, чтобы $\mathscr{B}$ обладало свойством: $A \in \mathscr{B}$ влечет за собой $\mathbb{R} \setminus A \in \mathscr{B}$. Далее, когда f непрерывна, мы хотим, чтобы $f^{-1}[(a, b)]$ лежало в $\mathscr{B}$, следовательно, $\mathscr{B}$ должно содержать открытые множества. Наконец (в согласии с нашим интуитивным пониманием размера), мы хотим, чтобы

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

если A_n попарно не пересекаются, т. е. мы хотим, чтобы $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{B}$, если каждое $A_n \in \mathscr{B}$.

Определение. **Борелевы множества** прямой $\mathbb{R}$ образуют наименьшее семейство множеств из $\mathbb{R}$ со следующими свойствами:

(i) семейство замкнуто относительно дополнений;
(ii) семейство замкнуто относительно счетных объединений;
(iii) семейство содержит каждый открытый интервал.

Наименьшее семейство с такими свойствами существует. В самом деле, если $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — совокупность семейств, обладающих свойствами (i), (ii) и (iii), то этими же свойствами обладает и $\bigcap_{\alpha\in A}\mathcal{B}_\alpha$. Таким образом, пересечение всех семейств со свойствами (i)—(iii) есть наименьшее такое семейство.

Теперь определим **меру Лебега** множеств из $\mathcal{B}$ — борелевых множеств в $\mathbb{R}$.

Определение. Пусть $\mathcal{I}$ — семейство всех счетных объединений попарно не пересекающихся открытых интервалов (т. е. в точности семейство всех открытых множеств), и пусть

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\right)\equiv\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)$$

(допускается бесконечное значение). Для любого $B\in\mathcal{B}$ положим по определению

$$\mu(B)=\inf_{\substack{I\in\mathcal{I}\\ B\subset I}}\mu(I).$$

Это понятие размера имеет четыре основных свойства:

Теорема I.8. (a) $\mu(\varnothing)=0$.

(b) Если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{B}$ и A_n попарно не пересекаются ($A_n\cap A_m=\varnothing$ при всех $m\neq n$), то $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$.

(c) $\mu(B)=\inf\{\mu(I)\,|\,B\subset I,\ I \text{ открыто}\}$.

(d) $\mu(B)=\sup\{\mu(C)\,|\,C\subset B,\ C \text{ компактно}\}$.

Бесконечная сумма в (b) содержит только положительные члены, поэтому она либо сходится к конечному числу, либо расходится к бесконечности, и в таком случае мы полагаем ее равной ∞. Свойства (c) и (d) говорят о том, что любое борелево множество может быть приближено «снаружи» открытыми множествами, а «изнутри» — компактными. Напоминаем читателю, что *на вещественной прямой* множество компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

В итоге мы расширили обычное понятие размера интервалов, и теперь понятно, как надо определить семейство функций, которые мы будем рассматривать:

Определение. Функция f называется **борелевой функцией**, если $f^{-1}[(a, b)]$ — борелево множество для всех a, b.

Часто удобно разрешать функциям принимать на малых множествах значения $\pm\infty$; в таком случае мы требуем, чтобы $f^{-1}[\{\pm\infty\}]$ было борелевым.

Предложение. f—борелева функция тогда и только тогда, когда $f^{-1}[B]\in\mathscr{B}$ для всех $B\in\mathscr{B}$ (см. задачу 14).

Из этого предложения следует, что композиция двух борелевых функций является борелевой. Во многих книгах рассматривается несколько более широкий по сравнению с борелевым класс функций. В них множество M называется измеримым, если справедливо равенство $M\cup A_1=B\cup A_2$, где B—борелево и $A_i\subset B_i$, B_i борелевы и удовлетворяют условию $\mu(B_i)=0$ (т. е. к борелевым множествам добавляют и из них вычитают «несущественные» множества). Измеримая функция определяется как функция f, для которой $f^{-1}[(a, b)]$ всегда измеримо. В таком случае из измеримости f и g уже не следует измеримость композиции $f\circ g$ и возникает много технических проблем. *Во всяком случае мы имеем дело только с борелевыми множествами и функциями и пользуемся словами «борелево» и «измеримое» как синонимами.*

Множество борелевых функций замкнуто относительно многих операций.

Предложение. (a) Если f, g борелевы, то таковы же и $f+g$, fg, $\max\{f, g\}$ и $\min\{f, g\}$. Если f борелева и $\lambda\in\mathbb{R}$, то и λf борелева.

(b) Если каждая f_n борелева, $n=1, 2, \ldots$ и $f_n(p)\longrightarrow f(p)$ для всех p, то f борелева.

Поскольку $|f|=\max\{f, -f\}$, фукция $|f|$ измерима, если f измерима.

Как мы коротко пояснили выше, имея $f\geqslant 0$, можно определить интеграл $\int f\,dx$ (для которого допускается значение ∞). Если $\int|f|\,dx<\infty$, мы пишем $f\in\mathscr{L}^1$ и по определению полагаем $\int f\,dx=\int f_+dx-\int f_-dx$, где $f_+=\max\{f, 0\}$; $f_-=\max\{-f, 0\}$. Через $\mathscr{L}^1(a, b)$ обозначается множество функций на (a, b), попадающих в $\mathscr{L}^1$, если продолжить их на всю вещественную прямую, доопределяя нулем вне (a, b). Когда $f\in\mathscr{L}^1(a, b)$, мы пишем $\int f\,dx=\int\limits_a^b f\,dx$. Тогда справедлива

Теорема I.9. Пусть f и g—измеримые функции. Тогда

(a) если $f, g\in\mathscr{L}^1(a, b)$, то этим же свойством обладают $f+g$ и λf при всех $\lambda\in\mathbb{R}$;

(b) если $|g|\leqslant f$ и $f\in\mathscr{L}^1$, то $g\in\mathscr{L}^1$;

(c) $\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$, если f и g лежат в $\mathscr{L}^1$;

(d) $\left|\int f\,dx\right| \leqslant \int |f|\,dx$, если $f \in \mathscr{L}^1$;

(e) если $f \leqslant g$, то $\int f\,dx \leqslant \int g\,dx$ при условии, что $f,\ g \in \mathscr{L}^1$;

(f) если f ограничена и измерима на $-\infty < a < b < \infty$, то $f \in \mathscr{L}^1$ и

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| \leqslant |b-a| \left(\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|\right).$$

Эта теорема показывает, что $\int$ обладает всеми хорошими свойствами интеграла Римана, хотя он и определен для более широкого класса функций.

Вскоре мы определим очень важное для дальнейшего пространство L^1; те свойства, благодаря которым оно полно, описываются следующими фундаментальными теоремами о сходимости:

Теорема I.10 (теорема о монотонной сходимости). Пусть функции $f_n \geqslant 0$ измеримы. Предположим, что $f_n(p) \to f(p)$ для каждого p и что $f_{n+1}(p) \geqslant f_n(p)$ для всех p и n (в таком случае мы пишем $f_n \nearrow f$). Если $\int |f_n(p)|\,dp < C$ для всех n, то $f \in \mathscr{L}^1$ и $\int |f(p) - f_n(p)|\,dp \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема I.11 (теорема о мажорированной сходимости). Пусть $f_n(p) \to f(p)$ для каждого p; предположим, что $|f_n(p)| \leqslant G(p)$ для всех n и некоторой функции $G \in \mathscr{L}^1$. Тогда $f \in \mathscr{L}^1$ и $\int |f(p) - f_n(p)|\,dp \to 0$ при $n \to \infty$.

В последнем случае мы говорим, что G мажорирует последовательность f_n. Существование мажорирующей функции — решающее обстоятельство. Например, пусть $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[-n,\,n]}(x)$. Тогда $f_n(x) \to 0$ для каждого x, но $\int |f_n|\,dx = 2$, так что $\int |f_n(x)|\,dx$ не стремится к нулю. Нетрудно понять, что в этом случае $\sup_n |f_n(x)| = G(x)$ не лежит в $\mathscr{L}^1$.

Казалось бы, мы уже можем определить $\mathscr{L}^1$ как метрическое пространство, положив $\rho(f, g) = \int |f-g|\,dx$. Однако пока сделать это нельзя, ибо равенство $\int |f-g|\,dx = 0$ не означает, что $f \equiv g$ (например, f и g могут отличаться в одной точке). Поэтому объясним сначала, что означает термин «почти всюду» (п. в):

Определение. Будем говорить, что свойство $C(x)$ имеет место **почти всюду** (п. в.), если $\{x \mid C(x)$ ложно$\}$ есть подмножество множества меры нуль.

Определение. Будем говорить, что две функции $f, g \in \mathscr{L}^1$ **эквивалентны**, если $f(x) = g(x)$ п. в. (т. е. $\int |f-g|\,dx = 0$).

Определение. Множество классов эквивалентности в $\mathscr{L}^1$ обозначим через L^1; L^1 с нормой $\|f\|_1 = \int |f|\,dx$ есть нормированное линейное пространство.

Таким образом, элементы L^1—это классы эквивалентности функций, равных п. в. В частности, когда $f \in L^1$, символ $f(x)$ для конкретного x не имеет смысла. Тем не менее мы продолжаем писать $f(x)$, но только в ситуациях, когда утверждения не зависят от выбора представителя класса эквивалентности. Например, утверждение: $f_n(x) \to f(x)$ *для почти всех* x—не зависит от представителей, выбранных для f и f_n. С помощью такой замены поточечной сходимости на поточечную сходимость почти всюду наши две теоремы о сходимости переносятся из $\mathscr{L}^1$ в L^1.

Предупредив читателя о том, что для $f \in L^1$ символ $f(x)$, строго говоря, бессмыслен, заметим, что в *некоторых специальных случаях* он имеет смысл. Предположим, что $f \in L^1$ имеет представитель $\tilde{f}$ (т. е. $\tilde{f}$—функция; f—класс эквивалентности функций), который непрерывен. Тогда ни один другой представитель класса f не является непрерывной функцией, так что естественно писать $f(x)$ вместо $\tilde{f}(x)$.

Важнейший факт о пространстве L^1 устанавливает следующая

Теорема I.12 (Рисс—Фишер). L^1 полно.

Доказательство. Пусть f_n—последовательность Коши в L^1. Достаточно доказать сходимость какой-нибудь ее подпоследовательности (см. задачу 3), поэтому перейдем к подпоследовательности (также обозначаемой через f_n) со свойством $\|f_n - f_{n+1}\| \leqslant 2^{-n}$. Положим

$$g_m(x) = \sum_{n=1}^{m} |f_n(x) - f_{n+1}(x)|.$$

Пусть g_∞—сумма бесконечного ряда (которая может равняться ∞). Тогда $g_m \nearrow g_\infty$ и $\int |g_m|\,dx \leqslant \sum_{n=1}^{m} \|f_n - f_{n+1}\| \leqslant 1$, так что по теореме о монотонной сходимости $g_\infty \in L^1$. Таким образом, $|g_\infty(x)| < \infty$ п. в. В результате

$$f_m(x) = f_1(x) - \sum_{n=1}^{m-1} (f_n(x) - f_{n+1}(x))$$

сходится поточечно п. в. к некоторой функции $f(x)$. Более того, $|f_m(x)| \leqslant |f_1(x)| + g_\infty(x) \in L^1$, так что $f_n \to f$ в L^1 в силу теоремы о мажорированной сходимости. ∎

Из этого доказательства вытекает (см. задачу 17) такое

Следствие. Если $f_n \to f$ в L^1, то некоторая *подпоследовательность* f_{n_i} сходится поточечно п. в. к f.

Наконец, сформулируем результат, который возвращает нас к нашей исходной идее.

Предложение. Пространство $C[a, b]$ плотно (по $\|\cdot\|_1$) в $L^1[a, b]$, т. е. L^1 есть пополнение C.

Доказательство. См. задачу 18.

Мы определили $L^1[a, b]$ как пространство вещественнозначных функций. Часто удобно иметь дело с комплекснозначными функциями, чьи вещественные и мнимые части лежат в $L^1[a, b]$. Когда не возникает недоразумения, мы обозначаем это пространство с нормой

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f|\, dx$$

также через $L^1[a, b]$. Интеграл от комплекснозначной функции определяется соотношением

$$\int f\, dx = \int \operatorname{Re}(f)\, dx + i \int \operatorname{Im}(f)\, dx.$$

I.4. Абстрактная теория меры

Один из наиболее важных инструментов, который в сочетании с абстрактным функциональным анализом служит изучению различных конкретных моделей,—это «общая» теория меры, т. е. теория, которой мы занимались в предыдущем разделе, но расширенная до более абстрактных рамок.

Простейший способ обобщения лебегова интеграла состоит в том, чтобы обобщить используемую меру, задавая ее по-прежнему на борелевых множествах вещественной прямой; мы рассмотрим этот специальный случай абстрактной теории меры первым. Напомним, что интеграл Лебега был построен следующим способом. Мы начали с понятия размера интервала, $\mu((a, b)) = b-a$, и однозначным образом расширили его на произвольные борелевы множества. Вооружившись понятием размера борелевых множеств, мы получили интеграл от борелевых функций, измеряя множества вида $f^{-1}[(a, b)]$. Мы нашли, что векторное пространство $L^1[0, 1]$, построенное в предыдущем разделе, есть в точности пополнение $C[0, 1]$ по метрике $d_2(f, g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\, dx$, где для определения d_2 нужен только интеграл Римана.