Из этого доказательства вытекает (см. задачу 17) такое

Следствие. Если $f_n \to f$ в L^1, то некоторая *подпоследовательность* f_{n_i} сходится поточечно п. в. к f.

Наконец, сформулируем результат, который возвращает нас к нашей исходной идее.

Предложение. Пространство $C[a, b]$ плотно (по $\|\cdot\|_1$) в $L^1[a, b]$, т. е. L^1 есть пополнение C.

Доказательство. См. задачу 18.

Мы определили $L^1[a, b]$ как пространство вещественнозначных функций. Часто удобно иметь дело с комплекснозначными функциями, чьи вещественные и мнимые части лежат в $L^1[a, b]$. Когда не возникает недоразумения, мы обозначаем это пространство с нормой

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f|\,dx$$

также через $L^1[a, b]$. Интеграл от комплекснозначной функции определяется соотношением

$$\int f\,dx = \int \operatorname{Re}(f)\,dx + i\int \operatorname{Im}(f)\,dx.$$

I.4. Абстрактная теория меры

Один из наиболее важных инструментов, который в сочетании с абстрактным функциональным анализом служит изучению различных конкретных моделей,—это «общая» теория меры, т. е. теория, которой мы занимались в предыдущем разделе, но расширенная до более абстрактных рамок.

Простейший способ обобщения лебегова интеграла состоит в том, чтобы обобщить используемую меру, задавая ее по-прежнему на борелевых множествах вещественной прямой; мы рассмотрим этот специальный случай абстрактной теории меры первым. Напомним, что интеграл Лебега был построен следующим способом. Мы начали с понятия размера интервала, $\mu((a, b)) = b-a$, и однозначным образом расширили его на произвольные борелевы множества. Вооружившись понятием размера борелевых множеств, мы получили интеграл от борелевых функций, измеряя множества вида $f^{-1}[(a, b)]$. Мы нашли, что векторное пространство $L^1[0, 1]$, построенное в предыдущем разделе, есть в точности пополнение $C[0, 1]$ по метрике $d_2(f, g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx$, где для определения d_2 нужен только интеграл Римана.

Предположим теперь, что задана произвольная неубывающая функция $\alpha(x)$ (т. е. из $x > y$ вытекает $\alpha(x) \geqslant \alpha(y)$). Нетрудно видеть, что предел справа $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \alpha(x+|\varepsilon|)$ и предел слева $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \alpha(x-|\varepsilon|)$ существуют; обозначим их $\alpha(x+0)$ и $\alpha(x-0)$ соответственно. Поскольку интервал (a, b) не включает точек a и b, естественно положить $\mu_\alpha((a, b)) = \alpha(b-0) - \alpha(a+0)$. На основе такого понятия размера интервала можно построить на борелевых множествах в $\mathbb{R}$ меру μ_α, т. е. отображение μ_α: $\mathcal{B} \to [0, \infty]$ со свойствами $\mu_\alpha(\cup B_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_\alpha(B_i)$, если $B_i \cap B_j = \varnothing$; и $\mu_\alpha(\varnothing) = 0$. По построению эта мера обладает свойством **регулярности**

$$\mu_\alpha(B) = \sup\{\mu(C) \mid C \subset B,\ C \text{ компактно}\} = \\ = \inf\{\mu(O) \mid B \subset O,\ O \text{ открыто}\}.$$

Кроме того, $\mu(C) < \infty$ для любого компактного множества C. Мера с этими двумя свойствами регулярности называется **борелевой мерой.** В частности, $\mu_\alpha([a, b]) = \alpha(b+0) - \alpha(a-0)$. Теперь можно построить интеграл $f \to \int f\, d\mu_\alpha$ (часто мы будем также писать $\int f\, d\alpha$) со свойствами (a)—(e) теоремы I.9; он называется интегралом Лебега—Стильтьеса. Пространства $L^1([a, b], d\alpha)$ и $L^1(\mathbb{R}, d\alpha)$ можно построить, как и прежде. Эти пространства классов эквивалентных функций полны в метрике $\rho(f, g) = \int |f-g|\, d\mu_\alpha$, и в них справедливы аналоги теорем о монотонной и мажорированной сходимостях. Непрерывные функции из $C[a, b]$ образуют плотное подпространство в $L^1([a, b], d\alpha)$; говоря иначе, $L^1([a, b], d\alpha)$ — это пополнение $C[a, b]$ по метрике $\rho_\alpha(f, g) = \int\limits_a^b |f-g|\, d\alpha$, где для определения ρ_α нужно использовать только интеграл Римана—Стильтьеса (см. задачу 11).

Рассмотрим три примера, иллюстрирующие разнообразие мер Лебега—Стильтьеса.

Пример 1. Пусть α — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда $\mu_\alpha((a, b)) = \int\limits_a^b (d\alpha/dx)\, dx$, где dx — мера Лебега, так что можно ожидать (и на самом деле это так), что

$$\int f\, d\alpha = \int f\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) dx.$$

В итоге такие меры можно по существу описать с помощью меры Лебега.

Пример 2. Предположим, что $\alpha(x)$ — характеристическая функция луча $[0, \infty)$. Тогда $\mu_\alpha(a, b) = 1$, если $0 \in (a, b)$, и $= 0$, если $0 \notin (a, b)$. Легко описать меру, которая при этом возникает: $\mu_\alpha(B) = 1$, если $0 \in B$, и $\mu_\alpha(B) = 0$, если $0 \notin B$. Мы предлагаем читателю явно построить соответствующий интеграл и убедиться, что

$$\int f\, d\alpha = f(0).$$

Мера $d\alpha$ известна под именем **меры Дирака** (поскольку она в точности отвечает δ-функции). Рассмотрим $L^1(\mathbb{R}, d\alpha)$ в этом случае. В $\mathscr{L}^1$ имеем $\rho(f, g) = |f(0) - g(0)|$, т. е. $\rho(f, g) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(0) = g(0)$. В итоге мы видим, что классы эквивалентности в L^1 полностью задаются значением $f(0)$, так что $L^1(\mathbb{R}, d\alpha)$ представляет собой одномерное векторное пространство! Обратите внимание, насколько эта ситуация отличается от случая $L^1(\mathbb{R}, dx)$, где значение «функции» в одной точке не определено (поскольку элементы в L^1 — это классы эквивалентности).

Пример 3. В нашем последнем примере будет использоваться довольно патологическая функция $\alpha(x)$, которую мы сначала построим. Пусть S — следующее подмножество отрезка $[0, 1]$:

$$S = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \cup \ldots,$$

т. е. при построении S нужно на каждом шаге добавлять к S среднюю треть каждой части, не попавшей в S на предыдущем шаге (см. рис. I.5). Лебегова мера S равна $1/3 + 2(1/9) + 4(1/27) + \ldots = 1$. Положим $C = [0, 1] \setminus S$. Лебегова мера этого

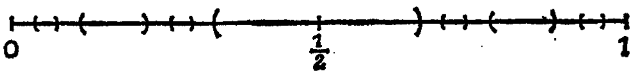

Рис. I.5. Множество Кантора.

множества равна нулю. Множество C, называемое **канторовым** множеством, легко описать, если представить каждое $x \in [0, 1]$ троичной дробью. Тогда $x \in C$ в том и только том случае, когда его троичное разложение не содержит 1. Канторово множество служит примером несчетного множества меры 0. Чтобы убедиться в этом, отобразим C взаимно однозначно *на* $[0, 1]$, заменяя все цифры 2 на 1 и истолковывая результат как двоичное разложение числа из $[0, 1]$. Построим теперь $\alpha(x)$ следующим образом: положим $\alpha(x) = 1/2$ на $(1/3, 2/3)$; $\alpha(x) = 1/4$ на $(1/9, 2/9)$; $\alpha(x) = 3/4$ на $(7/9, 8/9)$ и т. д.; см. рис. I.6. Продолжим α на $[0, 1]$, сделав ее непрерывной. Тогда α — непостояниая непрерывная функция со странным свойством: $\alpha'(x)$ существует п. в. по отношению к мере Лебега и равна нулю п. в. Теперь мы можем построить меру μ_α. Поскольку α непрерывна, $\mu_\alpha(\{p\})=0$ для любого одноточечного множества $\{p\}$. Тем не менее μ_α сосредоточена на множестве C в том смысле, что $\mu_\alpha([0, 1] \setminus C)=\mu_\alpha(S)=0$. С другой стороны, лебегова мера C равна нулю. Таким образом, μ_α и мера Лебега «проживают» на совершенно разных множествах.

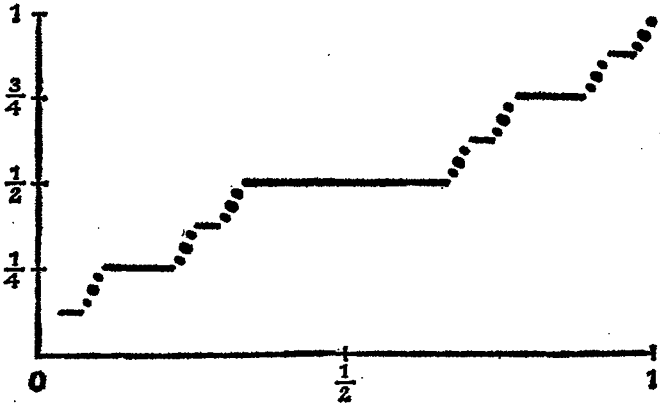

Рис. I.6. Функция Кантора.

Рассмотренные три примера моделируют (в смысле, который мы сейчас уточним) основные типы наиболее общих мер Лебега — Стильтьеса. Предположим, что μ—мера Бореля на $\mathbb{R}$. Прежде всего пусть $P=\{x \mid \mu(\{x\}) \neq 0\}$, т. е. P—множество **чистых точек** меры μ. Поскольку μ—борелева мера [$\mu(C)<\infty$ для любого компактного C], P—счетное множество. Положим по определению

$$\mu_{pp}(X)=\sum_{x \in P \cap X} \mu(\{x\})=\mu(P \cap X).$$

Тогда μ_{pp}—мера и разность $\mu_{cont}=\mu-\mu_{pp}$ положительна. При этом μ_{cont} обладает свойством $\mu_{cont}(\{p\})=0$ для всех p, т. е. не имеет чистых точек, а μ_{pp} имеет только чистые точки в том смысле, что $\mu_{pp}(X)=\sum_{x \in X} \mu_{pp}(\{x\})$.

Определение. Борелева мера μ на $\mathbb{R}$ называется **непрерывной**, если она не имеет чистых точек. Она называется **чисто точечной мерой**, если $\mu(X)=\sum_{x \in X} \mu(x)$ для любого борелева множества X.

Таким образом, мы убедились, что справедлива

Теорема I.13. Любую борелеву меру можно единственным образом разложить в сумму $\mu=\mu_{pp}+\mu_{cont}$, где μ_{cont}—непрерывная, а μ_{pp}—чисто точечная меры.

В итоге мы обобщили пример 2, введя в рассмотрение суммы мер Дирака. Существуют ли обобщения примеров 1 и 3?

Определение. Мы говорим, что μ **абсолютно непрерывна относительно меры Лебега**, если существует функция f, локально принадлежащая L^1 (т. е. $\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$ для любого конечного интервала (a, b)), такая, что

$$\int g\,d\mu = \int gf\,dx$$

для любой борелевой функции g из $L^1(\mathbb{R}, d\mu)$. В таком случае мы пишем $d\mu = f\,dx$.

Это определение обобщает пример 1; несколько ниже мы дадим другое (но эквивалентное!) определение абсолютной непрерывности.

Определение. Мы говорим, что μ **сингулярна относительно меры Лебега**, тогда и только тогда, когда $\mu(S) = 0$ для некоторого множества S, такого, что $\mathbb{R} \setminus S$ имеет нулевую лебегову меру.

В число фундаментальных результатов входит следующая

Теорема I.14 (теорема Лебега о разложении). Пусть μ — борелева мера. Тогда μ единственным образом представима в виде $\mu = \mu_{ac} + \mu_{sing}$, где мера μ_{ac} абсолютно непрерывна относительно лебеговой меры, а μ_{sing} сингулярна относительно лебеговой меры.

Итак, теоремы I.13 и I.14 говорят нам, что любая мера μ на $\mathbb{R}$ обладает каноническим разложением $\mu = \mu_{pp} + \mu_{ac} + \mu_{sing}$, где μ_{pp} чисто точечна и сингулярна относительно меры Лебега, μ_{ac} абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, а μ_{sing} — *непрерывна и сингулярна* относительно меры Лебега.

К такому же разложению приходят в квантовой механике, где любое состояние представляет собой сумму связанных состояний, состояний рассеяния и состояний, не имеющих физической интерпретации (в дальнейшем ценой значительных усилий мы продемонстрируем, что состояния последнего типа в квантовой механике не встречаются, т. е. что для некоторых определенных мер $\mu_{sing} = 0$ (см. гл. XIII)).

Это завершает наше изучение мер на $\mathbb{R}$. Следующий уровень обобщения включает в себя меры на множествах с некоторой заданной на них топологической структурой; мы вернемся к изучению такого промежуточного случая в § IV.4. А сейчас обсудим наиболее общий подход, позволяющий иметь дело с произвольными множествами. Прежде всего нам понадобится обобщение борелевых множеств.

Определение. Непустое семейство $\mathcal{R}$ подмножеств некоторого множества M называется **σ-кольцом**, если

(a) $A_i \in \mathcal{R}$, $i=1, 2, \ldots$, влечет за собой $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$;

(b) если $A, B \in \mathcal{R}$, то $A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Если $M \in \mathcal{R}$, мы говорим, что $\mathcal{R}$ есть **σ-поле.**

Определение меры очевидно!

Определение. **Мера** на множестве M с σ-кольцом $\mathcal{R}$ есть отображение μ: $\mathcal{R} \to [0, \infty]$ со свойствами:

(a) $\mu(\varnothing)=0$;

(b) $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, если $A_i \cap A_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$.

Мы часто будем говорить о пространстве с мерой $\langle M, \mu\rangle$ без явного упоминания $\mathcal{R}$, но это σ-кольцо — важнейший элемент определения. Иногда мы будем писать $\langle M, \mathcal{R}, \mu\rangle$. Для некоторых патологически «больших» пространств хотелось бы использовать понятие σ-кольца, а не σ-поля, но для простоты мы будем рассматривать меры на σ-полях и будем предполагать, что все пространство не слишком велико в смысле следующего определения:

Определение. Мера μ на σ-поле $\mathcal{F}$ называется **σ-конечной** тогда и только тогда, когда $M = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где $\mu(A_i) < \infty$ при всех i.

Мы предполагаем, что все наши меры σ-конечны.

Определение. Пусть M, N — множества с σ-полями $\mathcal{R}$ и $\mathcal{F}$. Отображение T: $M \to N$ называется **измеримым** (относительно $\mathcal{R}$ и $\mathcal{F}$), если $(\forall A \in \mathcal{F})$ $T^{-1}[A] \in \mathcal{R}$. Отображение f: $M \to \mathbb{R}$ называется измеримым, если оно измеримо по отношению к $\mathcal{R}$ и борелевым множествам на $\mathbb{R}$.

Имея меру μ на пространстве с мерой M, можно определить $\int f\,d\mu$ для любой положительной вещественнозначной измеримой функции на M и образовать $\mathcal{L}^1(M, d\mu)$ — множество интегрируемых функций и $L^1(M, d\mu)$ — множество классов эквивалентности равных п. в. по мере μ функций из $\mathcal{L}^1(M, d\mu)$. Так же как в случае $\langle M, d\mu\rangle = \langle \mathbb{R}, dx\rangle$, справедливы следующие важнейшие теоремы:

Теорема I.15 (теорема о монотонной сходимости). Если $f_n \in \mathcal{L}^1(M, d\mu)$, $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots$ и $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, то $f \in \mathcal{L}^1$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_1 < \infty$, и в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} \|f-f_n\|_1 = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \|f\|_1$.

Теорема I.16 (теорема о мажорированной сходимости). Если $f_n \in L^1(M, d\mu)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ п. в. по мере μ и существует функция $G \in L^1$, такая, что $|f_n(x)| \leqslant G(x)$ п. в. по мере μ для всех n, то $f \in L^1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0$.

Теорема I.17 (лемма Фату). Если $f_n \in \mathscr{L}^1$, каждое $f_n(x) \geqslant 0$ и $\underline{\lim} \|f_n\|_1 < \infty$, то $f(x) = \underline{\lim} f_n(x)$ лежит в $\mathscr{L}^1$ и $\|f\|_1 \leqslant \underline{\lim} \|f_n\|_1$.

Замечание. В лемме Фату ничего не говорится о $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1$.

Теорема I.18 (теорема Рисса—Фишера). Пространство $L^1(M, d\mu)$ полно.

Понятие сингулярности также обобщается.

Определение. Пусть μ, ν—две меры на пространстве M с σ-полем $\mathscr{R}$. Говорят, что μ и ν **взаимно сингулярны**, если существует множество $A \in \mathscr{R}$, для которого $\mu(A) = 0$ и $\nu(M \setminus A) = 0$.

Полезно ввести более слабое на вид определение абсолютной непрерывности, которая по существу противоположна свойству сингулярности:

Определение. Говорят, что ν **абсолютно непрерывна относительно** μ, если $\mu(A) = 0$ влечет за собой $\nu(A) = 0$.

Эквивалентность этого определения данному ранее вытекает из следующей теоремы:

Теорема I.19 (теорема Радона—Никодима). Мера ν абсолютно непрерывна относительно μ тогда и только тогда, когда существует измеримая функция f, такая, что

$$\nu(A) = \int f(x) \chi_A(x)\, d\mu(x)$$

для любого измеримого множества A. Функция f определяется однозначно п. в. (по мере μ).

Наконец, теорема Лебега о разложении имеет следующую абстрактную форму:

Теорема I.20 (теорема Лебега о разложении). Пусть μ, ν—две меры на измеримом пространстве $\langle M, \mathscr{R} \rangle$. Тогда ν можно однозначно представить в виде $\nu = \nu_{ac} + \nu_{sing}$, где μ и ν_{sing} взаимно сингулярны, а ν_{ac} абсолютно непрерывна относительно μ.

Последний вопрос из теории меры, который мы должны рассмотреть, касается изменения порядка интегрирования в повторном интеграле. Сначала выясним, какие функции можно повторно интегрировать.

Определение. Пусть $\langle M, \mathscr{R}\rangle$, $\langle N, \mathscr{F}\rangle$ — два множества с соответствующими σ-полями. Тогда σ-поле $\mathscr{R}\otimes\mathscr{F}$ подмножеств в $M\times N$ определяется как наименьшее σ-поле, содержащее $\{R\times F \mid R\in\mathscr{R}, F\in\mathscr{F}\}$.

Заметим, что если функция f: $M\times N\longrightarrow \mathbb{R}$ измерима (по отношению к $\mathscr{R}\otimes\mathscr{F}$), то для любого $m\in M$ функция $n\mapsto f(m, n)$ измерима (по отношению к $\mathscr{F}$). Если ν — мера на N, такая, что $\int f(m, n)\,d\nu(n)$ существует для всех m, то можно показать, что функция $m\mapsto\int f(m, n)\,d\nu(n)$ измерима (по отношению к $\mathscr{R}$). В теории интегрирования существует прямой аналог свойства абсолютно сходящихся рядов не менять суммы при перегруппировке членов ряда.

Теорема I.21 (теорема Фубини). Пусть f — измеримая функция на $M\times N$. Пусть μ — мера на M, а ν — мера на N. Тогда

$$\int_M\left(\int_N |f(m, n)|\,d\nu(n)\right)d\mu(m)<\infty$$

в том и только том случае, когда

$$\int_N\left(\int_M |f(m, n)|\,d\mu(m)\right)d\nu(n)<\infty,$$

и если один (и, следовательно, оба) из этих интегралов конечен, то

$$\int_N\left(\int_M f(m, n)\,d\mu(m)\right)d\nu(n)=\int_M\left(\int_N f(m, n)\,d\nu(n)\right)d\mu(m).$$

Из задачи 25 читатель увидит, что решающую роль здесь играет конечность интеграла от абсолютного значения.

Новые возможности использования теоремы Фубини открываются после введения понятия меры-произведения:

Теорема I.22. Пусть σ-конечная мера μ задана на $\langle M, \mathscr{R}\rangle$, а σ-конечная мера ν — на $\langle N, \mathscr{F}\rangle$. Тогда существует единственная мера $\mu\otimes\nu$ на $\langle M\times N, \mathscr{R}\otimes\mathscr{F}\rangle$, обладающая таким свойством:

$$(\mu\otimes\nu)(R\times F)=\mu(R)\,\nu(F)$$

(где $0\cdot\infty=0$). Если f — измеримая функция на $M\times N$, то

$$\int_M\left(\int_N |f(m, n)|\,d\nu(n)\right)d\mu(m)<\infty$$

тогда и только тогда, когда

$$\int_{M\times N}|f|\,d(\mu\otimes\nu)<\infty,$$

и в этом случае

$$\int\limits_{M\times N} fd\,(\mu\otimes\nu)=\int\limits_M\left(\int\limits_N f\,d\nu\right)d\mu.$$

Меру $\mu\otimes\nu$ можно описать совершенно явным образом. Если $M\in\mathcal{R}\times\mathcal{F}$ и $M\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R_i\times F_i$, то $(\mu\otimes\nu)(M)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(R_i)\,\nu(F_i)$. На самом деле для любого $M\in\mathcal{R}\times\mathcal{F}$

$$(\mu\otimes\nu)(M)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(R_i)\,\nu(F_i)\;\middle|\;M\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}R_i\times F_i\right\}.$$

В частности, M можно приблизить с произвольно малой погрешностью счетным объединением прямоугольников.

I.5. Два приема доказательства сходимости

В этом разделе мы описываем два приема, которые много раз пригодятся нам в дальнейшем. Несмотря на то что они элементарны и читатель может быть с ними давно знаком, нам кажется разумным обсудить их специально.

Первый из них, который мы будем называть $\varepsilon/3$-приемом, лучше всего виден в доказательстве следующей теоремы:

Теорема I.23. Пусть $C[a, b]$ — множество непрерывных на $[a, b]$ функций с метрикой

$$d_1(f,\ g)=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|,$$

индуцированной нормой $\|f\|_\infty=d_1(f,\ 0)$. Тогда $C[a,\ b]$ с нормой $\|\cdot\|_\infty$ полно.

Доказательство. Пусть f_n есть последовательность Коши относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$. Тогда $|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\|f_n-f_m\|_\infty\to 0$ при $n,\ m\to\infty$ для любого фиксированиого $x\in[a,\ b]$, так что $f_n(x)$ есть последовательность Коши вещественных чисел. Поскольку $\mathbb{R}$ полно, для каждого x существует число $f(x)$, такое, что $f_n(x)\to f(x)$. Для заданного ε найдем такое N, что $\|f_n-f_m\|_\infty\leqslant\varepsilon$ при $n,\ m\geqslant N$. Тогда

$$\begin{aligned}\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-f_N(x)| &= \sup_{a\leqslant x\leqslant b}\ \lim_{n\to\infty}|f_n(x)-f_N(x)|\leqslant\\ &\leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b}\ \sup_{n\geqslant N}|f_n(x)-f_N(x)|=\\ &= \sup_{n\geqslant N}\|f_n-f_N\|_\infty\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

В итоге, если показать, что $f\in C[a,\ b]$, то можно будет заключить, что $\|f-f_n\|_\infty\to 0$, так что $f_n\to f$ в $C[a,\ b]$.