и в этом случае

$$\int\limits_{M\times N} fd\,(\mu\otimes\nu)=\int\limits_M\left(\int\limits_N f\,d\nu\right)d\mu.$$

Меру $\mu\otimes\nu$ можно описать совершенно явным образом. Если $M\in\mathcal{R}\times\mathcal{F}$ и $M\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R_i\times F_i$, то $(\mu\otimes\nu)(M)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(R_i)\,\nu(F_i)$. На самом деле для любого $M\in\mathcal{R}\times\mathcal{F}$

$$(\mu\otimes\nu)(M)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(R_i)\,\nu(F_i)\;\middle|\;M\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}R_i\times F_i\right\}.$$

В частности, M можно приблизить с произвольно малой погрешностью счетным объединением прямоугольников.

I.5. Два приема доказательства сходимости

В этом разделе мы описываем два приема, которые много раз пригодятся нам в дальнейшем. Несмотря на то что они элементарны и читатель может быть с ними давно знаком, нам кажется разумным обсудить их специально.

Первый из них, который мы будем называть $\varepsilon/3$-приемом, лучше всего виден в доказательстве следующей теоремы:

Теорема I.23. Пусть $C[a, b]$ — множество непрерывных на $[a, b]$ функций с метрикой

$$d_1(f, g)=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|,$$

индуцированной нормой $\|f\|_\infty=d_1(f, 0)$. Тогда $C[a, b]$ с нормой $\|\cdot\|_\infty$ полно.

Доказательство. Пусть f_n есть последовательность Коши относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$. Тогда $|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\|f_n-f_m\|_\infty\to 0$ при $n,\ m\to\infty$ для любого фиксированиого $x\in[a, b]$, так что $f_n(x)$ есть последовательность Коши вещественных чисел. Поскольку $\mathbb{R}$ полно, для каждого x существует число $f(x)$, такое, что $f_n(x)\to f(x)$. Для заданного ε найдем такое N, что $\|f_n-f_m\|_\infty\leqslant\varepsilon$ при $n,\ m\geqslant N$. Тогда

$$\begin{aligned}\sup_{a<x<b}|f(x)-f_N(x)|&=\sup_{a<x<b}\lim_{n\to\infty}|f_n(x)-f_N(x)|\leqslant\\&\leqslant\sup_{a<x<b}\sup_{n\geqslant N}|f_n(x)-f_N(x)|=\\&=\sup_{n\geqslant N}\|f_n-f_N\|_\infty\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

В итоге, если показать, что $f\in C[a, b]$, то можно будет заключить, что $\|f-f_n\|_\infty\to 0$, так что $f_n\to f$ в $C[a, b]$.

Таким образом, осталось доказать, что f непрерывна, или, выражаясь иначе, что «равномерный предел непрерывных функций — непрерывная функция». Фиксируем $x \in [a, b]$ и $\varepsilon > 0$. Нужно найти такое δ, что $|x-y| < \delta$ влечет за собой $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Выберем n таким, чтобы $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/3$. Теперь, поскольку f_n непрерывны, подберем такое δ, чтобы из $|x-y| < \delta$ следовало $|f_n(x)-f_n(y)| < \varepsilon/3$. Тогда из $|x-y| < \delta$ вытекает

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(y)| + |f_n(y)-f(y)| < \\ < \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Следовательно, f непрерывна. ∎

В чем суть $\varepsilon/3$-приема? Нам задано семейство сходящихся последовательностей $\{f_n(x) \to f(x)\}_x$ и *равномерная оценка скорости сходимости*, т. е. оценка, не зависящая от x, параметризующего семейство. Мы располагаем также некоторыми сведениями о поведении $f_n(x)$ при изменении параметра x и фиксированном n, но *эта информация не обязательно равномерна по n*. То, что мы проделали, наглядно изображено на рис. I.7; $\varepsilon/3$-прием

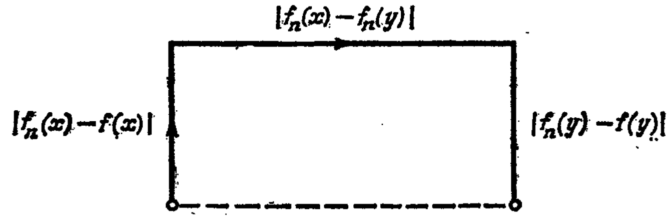

Рис. I.7. $\varepsilon/3$-прием.

можно назвать еще доказательством «вверх, через и вокруг». В следующем разделе мы увидим, что происходит, когда нет равномерной информации о скорости сходимости, но зато можно следить (равномерно по n) за тем, как ведет себя $f_n(x)$ при изменении x; $\varepsilon/3$-прием, как мы увидим, работает и в этом случае. Дальнейшие примеры $\varepsilon/3$-приема см. в задачах 27, 29.

Другой прием, который мы назовем «методом диагональной последовательности», иллюстрируется следующей теоремой.

Теорема I.24. Пусть $f_n(m)$ — равномерно ограниченная последовательность функций на множестве положительных целых чисел, т. е. $|f_n(m)| \leqslant C$ для всех m, n. Тогда существует такая подпоследовательность $\{f_{\hat{n}(i)}(m)\}_{i=1}^{\infty}$, что $f_{\hat{n}(i)}(m)$ сходится при $i \to \infty$ для каждого фиксированного m.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $f_n(1)$. Это ограниченное множество чисел, поэтому можно найти подпоследовательность $f_{n_1(i)}$, такую, что $f_{n_1(i)}(1) \to f_\infty(1)$ для некоторого числа $f_\infty(1)$. Далее рассмотрим последовательность $f_{n_1(i)}(2)$. Можно найти подпоследовательность $f_{n_2(i)}(2) \to f_\infty(2)$ при $i \to \infty$. Действуя по индукции, можно найти идущие одна за другой подпоследовательности $f_{n_k(i)}$, такие, что (a) $f_{n_{k+1}(i)}$ — подпоследовательность в $f_{n_k(i)}$ и (b) $f_{n_k(i)}(k) \to f_\infty(k)$ при $i \to \infty$. Таким образом, в частности, $f_{n_k(i)}(j) \to f_\infty(j)$ при $i \to \infty$ для $j = 1, 2, \ldots, k$. Для того чтобы получить подпоследовательность $f_{\hat{n}(i)}$, сходящуюся для каждого j, можно попытаться взять предел горизонтальной последовательности (см. рис. I.8, *а*), но это не обязательно приведет

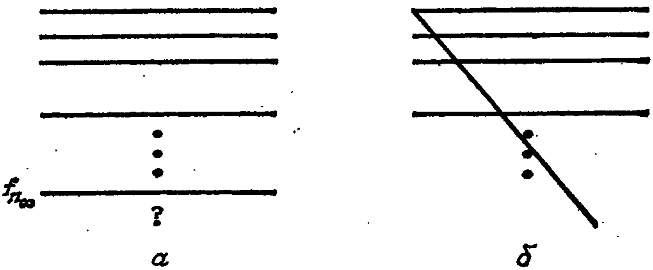

Рис. I.8. Диагональный метод.

к цели (ибо может случиться, что $n_k(1) \to \infty$). Простейший выход — взять предел диагональной последовательности $\hat{n}(k) = n_k(k)$. Тогда $f_{\hat{n}(k)}$, $f_{\hat{n}(k+1)}$, ... — подпоследовательность $f_{n_k(i)}$, поэтому $f_{\hat{n}(i)}(k) \to f_\infty(k)$ при $i \to \infty$ для любого k. ∎

I.6. Равностепенная непрерывность

Мы уже видели, что можно следить за зависимостью $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ от x, если иметь равномерную по x информацию о законе приближения к пределу. Здесь мы изучим, что случится, когда вместо этого известна информация, равномерная по n; мы увидим, что можно не только получить сведения о зависимости предела от x, но и значительно расширить скудные исходные знания о законе приближения к пределу. Сначала уточним, что значит «следить за поведением по x равномерно по n».

Определение. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство функций из метрического пространства $\langle X, \rho \rangle$ в другое метрическое пространство $\langle Y, d \rangle$. Семейство $\mathcal{F}$ называют **равностепенно непрерывным**, если

$$(\forall \varepsilon)(\forall x \in X)(\exists \delta)(\forall f \in \mathcal{F})\ \rho(x, x') < \delta \text{ влечет за собой } d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$