тельность $f_{n_1(i)}$, такую, что $f_{n_1(i)}(1) \to f_\infty(1)$ для некоторого числа $f_\infty(1)$. Далее рассмотрим последовательность $f_{n_1(i)}(2)$. Можно найти подпоследовательность $f_{n_2(i)}(2) \to f_\infty(2)$ при $i \to \infty$. Действуя по индукции, можно найти идущие одна за другой подпоследовательности $f_{n_k(i)}$, такие, что (a) $f_{n_{k+1}(i)}$ — подпоследовательность в $f_{n_k(i)}$ и (b) $f_{n_k(i)}(k) \to f_\infty(k)$ при $i \to \infty$. Таким образом, в частности, $f_{n_k(i)}(j) \to f_\infty(j)$ при $i \to \infty$ для $j = 1, 2, \ldots, k$. Для того чтобы получить подпоследовательность $f_{\hat{n}(i)}$, сходящуюся для каждого j, можно попытаться взять предел горизонтальной последовательности (см. рис. I.8, *a*), но это не обязательно приведет

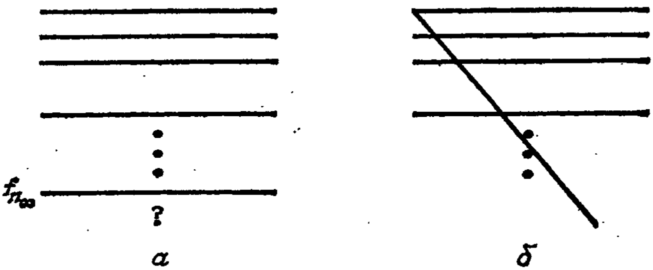

Рис. I.8. Диагональный метод.

к цели (ибо может случиться, что $n_k(1) \to \infty$). Простейший выход — взять предел диагональной последовательности $\hat{n}(k) = n_k(k)$. Тогда $f_{\hat{n}(k)}, f_{\hat{n}(k+1)}, \ldots$ — подпоследовательность $f_{n_k(i)}$, поэтому $f_{\hat{n}(i)}(k) \to f_\infty(k)$ при $i \to \infty$ для любого k. ∎

I.6. Равностепенная непрерывность

Мы уже видели, что можно следить за зависимостью $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ от x, если иметь равномерную по x информацию о законе приближения к пределу. Здесь мы изучим, что случится, когда вместо этого известна информация, равномерная по n; мы увидим, что можно не только получить сведения о зависимости предела от x, но и значительно расширить скудные исходные знания о законе приближения к пределу. Сначала уточним, что значит «следить за поведением по x равномерно по n».

Определение. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство функций из метрического пространства $\langle X, \rho\rangle$ в другое метрическое пространство $\langle Y, d\rangle$. Семейство $\mathcal{F}$ называют **равностепенно непрерывным**, если

$$(\forall\varepsilon)(\forall x \in X)(\exists\delta)(\forall f \in \mathcal{F})\ \rho(x, x') < \delta \text{ влечет за собой } d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Говорят, что $\mathcal{F}$ — **равномерно равностепенно непрерывное семейство**, если

$$(\forall\varepsilon)(\exists\delta)(\forall x\in X)(\forall f\in\mathcal{F})\,\rho(x,\ x')<\delta \text{ влечет за собой } d(f(x),\ f(x'))<\varepsilon.$$

Для сравнения заметим, что утверждение о непрерывности всех $f\in\mathcal{F}$ означает, что если $(\forall\varepsilon)(\forall x\in X)(\forall f\in\mathcal{F})(\exists\delta)\,\rho(x,\ x')<\delta$, то $d(f(x),\ f(x'))<\varepsilon$. Таким образом, в случае простой непрерывности δ может зависеть от f и x (так же как и от ε), тогда как равностепенная непрерывность говорит о независимости δ от f; наконец, равномерная равностепенная непрерывность говорит о зависимости δ только от ε.

Как обещано выше, легко превратить данные о $f_n(x)$, равномерные по n, в информацию о пределе:

Теорема I.25. Пусть f_n — такая последовательность функций из одного метрического пространства в другое, что семейство $\{f_n\}$ равностепенно непрерывно. Предположим, что $f_n(x)\to f(x)$ поточечно для любого x. Тогда f непрерывна.

Доказательство. По заданным ε и x выберем такое δ, чтобы из $\rho(x,\ x')<\delta$ следовало $d(f_n(x),\ f_n(x'))<\varepsilon/2$ для всех n. Поскольку метрика d непрерывна, $d(f(x),\ f(x'))=\lim\limits_{n\to\infty} d(f_n(x),\ f_n(x'))$, так что $\rho(x,x')<\delta$ влечет за собой $d(f(x),\ f(x'))\leqslant\varepsilon/2<\varepsilon$. ∎

Из доказательства ясно, что в случае, когда $\{f_{n,m}\}$ — равностепенно непрерывное семейство и $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n,m}\equiv f_m$ существует для каждого m, семейство $\{f_m\}$ равностепенно непрерывно. Равностепенная непрерывность приводит к важному следствию, которое, как мы увидим, хорошо сочетается с методом диагональной последовательности.

Теорема I.26. Пусть $\{f_n\}$ — равностепенно непрерывное семейство функций из метрического пространства $\langle X,\ \rho\rangle$ в полное метрическое пространство $\langle Y,\ d\rangle$. Предположим, что $f_n(x)$ сходится для всех x из некоторого плотного в X множества D. Тогда $f_n(x)$ сходится для всех $x\in X$. (Заметьте, что тогда по теореме I.25 предельная функция непрерывна.)

Доказательство: см. задачу 29. ∎

Теорема I.26 говорит, что в общем случае сходимость на плотном множестве в сочетании с равностепенной непрерывностью приводит к поточечной сходимости всюду. Еще более эффектный результат состоит в том, что для последовательности функций на $[0,\ 1]$ (см. задачу 30) из равномерной равностепенной непрерывности и поточечной сходимости следует *равномерная сходимость*.

Теорема I.27. Пусть $\{f_n\}$ — равномерно равностепенно непрерывное семейство функций на $[0, 1]$. Предположим, что $f_n(x) \to f(x)$ для каждого x из $[0, 1]$. Тогда $f_n(x) \to f(x)$ равномерно по x.

Доказательство. Пусть ε задано. Выберем такое δ, чтобы из $|x-y| < \delta$ вытекало $|f_n(x)-f_n(y)| < \varepsilon/3$ для всех n. Далее выберем такие $y_1, \ldots, y_m$, чтобы любая точка из $[0, 1]$ была в δ-окрестности некоторой точки y_i. Поскольку $\{y_1, \ldots, y_m\}$ — конечное множество, можно найти такое N, чтобы из $n > N$ вытекало $|f_n(y_i)-f(y_i)| < \varepsilon/3$; $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда $\varepsilon/3$-прием дает $\|f_n-f\|_\infty < \varepsilon$ для всех $n > N$. ∎

Каждое равностепенно непрерывное семейство функций на $[0, 1]$ является равномерно равностепенно непрерывным (задача 31).

Теоремы о сходимости (теоремы I.26 и I.27), диагональный метод § I.5 и сделанное только что замечание (задача 31) позволяют доказать следующий красивый результат.

Теорема I.28 (теорема Асколи). Пусть f_n — равномерно ограниченное равностепенно непрерывное семейство функций на $[0,1]$. Тогда некоторая подпоследовательность $f_{n(i)}$ сходится на $[0,1]$ равномерно.

Доказательство. Пусть $q_1, q_2, \ldots$ — нумерация рациональных чисел. Поскольку f_n равномерно ограничены, $|f_n(q_m)| \leqslant C$ для всех m и n. С помощью диагонального метода можно найти подпоследовательность, для которой $f_{n(i)}(q_m)$ сходятся при $i \to \infty$ для каждого m. Тогда, по теореме I.26, $f_{n(i)}$ сходятся поточечно всюду, а по теореме I.27 они сходятся равномерно. ∎

Здесь мы не будем подробно обсуждать описанных методов, однако упомянем два примера, к которым мы еще вернемся и которые демонстрируют разнообразие применений. В § V.1 определяется метрика на множестве $\mathscr{G}_D$ всех функций, аналитических в некоторой области D. В теореме V.25 мы используем равностепенную непрерывность для доказательства того, что некоторое подмножество в $\mathscr{G}_D$ компактно. В гл. XX обсуждается предел плотности свободной энергии «решеточного газа» в ящике при стремлении объема ящика к бесконечности. Наше доказательство существования такого предела для широкого класса взаимодействий проводится в три этапа. (1) Множество взаимодействий снабжается метрикой и доказывается, что взаимодействия со строго конечной областью действия в этой метрике плотны во множестве всех «допустимых» взаимодействий. (2) Плотность свободной энергии F_Λ при фиксированном объеме Λ рассматривается как функция на метрическом пространстве допустимых взаимодействий, и доказывается, что семейство $\{F_\Lambda\}$ равностепенно непрерывно. (3)

Доказывается, что $\lim\limits_{\Lambda \to \infty} F_\Lambda(\Phi)$ существует, если Φ—взаимодействие с конечной областью действия. Тогда из соображений, связанных с равностепенной непрерывностью, следует, что предел $\lim\limits_{\Lambda \to \infty} F_\Lambda(\Phi)$ существует для всех допустимых взаимодействий Φ (и непрерывен по Φ).

ЗАМЕЧАНИЯ

§ 1.1. Обсуждение тонкостей, связанных с леммой Цорна, аксиомой выбора и т. д., доступное новичкам, можно найти в книге Халмоша: P. R. Halmos, Naive Set Theory, Van Nostrand-Reinhold, Princeton, N.J., 1960.

§ 1.2. Дополнительное обсуждение понятий, относящихся к метрическому пространству, см. в книгах: A. Gleason, Introduction to Abstract Analysis, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966, или А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, «Наука», М., 1968. По поводу нормированных линейных пространств (и в частности, приведенного нами описания риманова интеграла) см. Ж. Дьёдонне, Основы современного анализа, «Мир», М., 1964, или L. Loomis and S. Sternberg, Advanced Calculus, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.

§ 1.3, 1.4. Обсуждение интегрирования по Лебегу см. в книгах: J. Williamson, Introduction to the Lebesgue Integral, Holt, New York, 1962, или У. Рудин, Основы современного анализа, изд. 2-е, стереотип., «Мир», М., 1976. При изучении абстрактной теории меры мы особенно рекомендуем книги: S. K. Berberian, Measure and Integration, Macmillan, New York, 1965, H. Royden, Real Analysis, Macmillan, New York, 1968 г. См. также П. Халмош, Теория меры, ИЛ, М., 1953; Н. Данфорд и Дж. Шварц, Линейные операторы, т. 1, Общая теория, ИЛ, М., 1962, гл. III.

Обсуждение парадокса Банаха—Тарского см. в работах: R. Rosenblum, Elements of Mathematical Logic, Dover, New York, 1950, p. 150, или R. Robinson, *Fund. Math.*, 34 (1947), 246.

Отметим, что борелевы множества можно построить следующим образом. Начнем с открытых множеств и их дополнений—замкнутых множеств. Добавим к ним счетные объединения замкнутых множеств, называемые F_σ-множествами, и их дополнения (счетные пересечения открытых множеств), называемые G_δ-множествами. Затем возьмем счетные объединения G_δ-множеств, называемые $G_{\delta\sigma}$-множествами, и их дополнения $F_{\sigma\delta}$-множества. Затем добавим $G_{\delta\sigma\delta}$ и т. д. *После счетного числа шагов дело еще не сделано*, ибо объединение одного G_δ, одного $F_{\sigma\delta}$, одного $G_{\delta\sigma\delta}$, ... может не войти в построенную совокупность. Для завершения нужна трансфинитная индукция до первого несчетного порядкового числа.

Как видно из задач, борелевы функции образуют наименьшее семейство, замкнутое относительно поточечного предельного перехода и содержащее все непрерывные функции. Как и в случае борелевых множеств, для его построения требуется трансфинитная индукция. Однако заметим, что при любой борелевой мере μ любая борелева функция равна почти всюду относительно μ поточечному пределу непрерывных функций (задачи 18 и 19).

Отбрасывая средние трети на отрезке $[0, 1]$, можно построить замкнутое множество положительной меры с пустой внутренностью.

Подход к мерам на топологических пространствах (а не на абстрактных множествах), который мы обсуждаем в § IV.4, моден у французской школы. См. Н. Бурбаки, Интегрирование. Меры, интегрирование мер, «Наука»,