Доказывается, что $\lim_{\Lambda\to\infty} F_\Lambda(\Phi)$ существует, если Φ—взаимодействие с конечной областью действия. Тогда из соображений, связанных с равностепенной непрерывностью, следует, что предел $\lim_{\Lambda\to\infty} F_\Lambda(\Phi)$ существует для всех допустимых взаимодействий Φ (и непрерывен по Φ).

ЗАМЕЧАНИЯ

§ I.1. Обсуждение тонкостей, связанных с леммой Цорна, аксиомой выбора и т. д., доступное новичкам, можно найти в книге Халмоша: P. R. Halmos, Naive Set Theory, Van Nostrand-Reinhold, Princeton, N.J., 1960.

§ I.2. Дополнительное обсуждение понятий, относящихся к метрическому пространству, см. в книгах: A. Gleason, Introduction to Abstract Analysis, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966, или А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, «Наука», М., 1968. По поводу нормированных линейных пространств (и в частности, приведенного нами описания риманова интеграла) см. Ж. Дьёдонне, Основы современного анализа, «Мир», М., 1964, или L. Loomis and S. Sternberg, Advanced Calculus, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.

§ I.3, I.4. Обсуждение интегрирования по Лебегу см. в книгах: J. Williamson, Introduction to the Lebesgue Integral, Holt, New York, 1962, или У. Рудин, Основы современного анализа, изд. 2-е, стереотип., «Мир», М., 1976. При изучении абстрактной теории меры мы особенно рекомендуем книги: S. K. Berberian, Measure and Integration, Macmillan, New York, 1965, H. Royden, Real Analysis, Macmillan, New York, 1968 г. См. также П. Халмош, Теория меры, ИЛ, М., 1953; Н. Данфорд и Дж. Шварц, Линейные операторы, т. 1, Общая теория, ИЛ, М., 1962, гл. III.

Обсуждение парадокса Банаха—Тарского см. в работах: R. Rosenblum, Elements of Mathematical Logic, Dover, New York, 1950, p. 150, или R. Robinson, *Fund. Math.*, 34 (1947), 246.

Отметим, что борелевы множества можно построить следующим образом. Начнем с открытых множеств и их дополнений—замкнутых множеств. Добавим к ним счетные объединения замкнутых множеств, называемые F_σ-множествами, и их дополнения (счетные пересечения открытых множеств), называемые G_δ-множествами. Затем возьмем счетные объединения G_δ-множеств, называемые $G_{\delta\sigma}$-множествами, и их дополнения $F_{\sigma\delta}$-множества. Затем добавим $G_{\delta\sigma\delta}$ и т. д. *После счетного числа шагов дело еще не сделано*, ибо объединение одного G_δ, одного $F_{\sigma\delta}$, одного $G_{\delta\sigma\delta}$, ... может не войти в построенную совокупность. Для завершения нужна трансфинитная индукция до первого несчетного порядкового числа.

Как видно из задач, борелевы функции образуют наименьшее семейство, замкнутое относительно поточечного предельного перехода и содержащее все непрерывные функции. Как и в случае борелевых множеств, для его построения требуется трансфинитная индукция. Однако заметим, что при любой борелевой мере μ любая борелева функция равна почти всюду относительно μ поточечному пределу непрерывных функций (задачи 18 и 19).

Отбрасывая средние трети на отрезке $[0, 1]$, можно построить замкнутое множество положительной меры с пустой внутренностью.

Подход к мерам на топологических пространствах (а не на абстрактных множествах), который мы обсуждаем в § IV.4, моден у французской школы. См. Н. Бурбаки, Интегрирование. Меры, интегрирование мер, «Наука», М., 1967; Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара, свертка и представления, «Наука» М., 1970, или (красивое и краткое обсуждение) L. Nachbin, The Haar Integral, Van Nostrand-Reinhold, Princeton, N. J., 1965, Ch. I.

§ I.6. Теорему Асколи естественно формулировать для функций на произвольном компактном метрическом пространстве или, более общо, на равномерном пространстве с первой аксиомой счетности (которое на самом деле всегда метризуемо), например на компактной топологической группе.

Идея использовать равностепенную непрерывность при доказательстве существования термодинамического предела восходит по крайней мере к работе: R. B. Griffiths, A Proof that the Free Energy of a Spin System is Extensive, *J. Math. Phys.*, 5 (1964), 1215—1222. Доказательство, которое мы наметили для решеточных газов и которое обсуждается в гл. XX, принадлежит Галлавотти и Мираклю: G. Gallavotti and S. Miracle, Statistical Mechanics of Lattice Systems, *Commun. Math. Phys.*, 5 (1967), 317—324.

В теории аналитических функций равностепенная непрерывность лежит по существу в основе одного из доказательств теоремы Римана; см., например, L. Ahlfors, Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1953, где множества равностепенно непрерывных функций называются «нормальными семействами».

ЗАДАЧИ

1. Найдите контрпример к утверждению: каждое симметричное транзитивное отношение рефлексивно. Что неправильно в доказательстве: «из xRy и yRx в силу транзитивности вытекает xRx»?

†*2.* Проверьте, что кандидаты в метрики из примеров 1—3 § I.2 на самом деле метрики.

3. Пусть $\{x_n\}_{i\to\infty}$ — последовательность Коши в метрическом пространстве $\langle X, \rho\rangle$. Предположим, что $x_{n(i)} \longrightarrow x_\infty$ для некоторой подпоследовательности $x_{n(i)}$. Докажите, что $x_n \longrightarrow x_\infty$.

4. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в некотором метрическом пространстве, и пусть x_∞ — заданный элемент. Предположим, что каждая подпоследовательность из x_n имеет подпоследовательность, сходящуюся к x_∞. Докажите, что $x_n \longrightarrow x_\infty$.

†*5.* Проведите в деталях доказательство теоремы I.3.

†*6.* Докажите теоремы I.4 и I.5.

†*7.* Докажите теорему I.6.

8. Докажите: если $x_n \longrightarrow x_\infty$ в метрическом пространстве $\langle X, d\rangle$, то $\lim\limits_{n\to\infty} d(x, x_n) = d(x, x_\infty)$ для любого x.

†*9.* Завершите доказательство теоремы I.7.

†*10.* Докажите, что $S[a, b]$ плотно в $PC[a, b]$ по норме $\|\cdot\|_\infty$.

11. (a) Пусть α — функция на $[0, 1]$. Ее называют функцией ограниченной вариации, если существует такое C, что

$$\sum_{i=1}^{n-1} |\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)| \le C$$