М., 1967; Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара, свертка и представления, «Наука» М., 1970, или (красивое и краткое обсуждение) L. Nachbin, The Haar Integral, Van Nostrand-Reinhold, Princeton, N. J., 1965, Ch. I.

§ I.6. Теорему Асколи естественно формулировать для функций на произвольном компактном метрическом пространстве или, более общо, на равномерном пространстве с первой аксиомой счетности (которое на самом деле всегда метризуемо), например на компактной топологической группе.

Идея использовать равностепенную непрерывность при доказательстве существования термодинамического предела восходит по крайней мере к работе: R. B. Griffiths, A Proof that the Free Energy of a Spin System is Extensive, *J. Math. Phys.*, 5 (1964), 1215—1222. Доказательство, которое мы наметили для решеточных газов и которое обсуждается в гл. XX, принадлежит Галлавотти и Мираклю: G. Gallavotti and S. Miracle, Statistical Mechanics of Lattice Systems, *Commun. Math. Phys.*, 5 (1967), 317—324.

В теории аналитических функций равностепенная непрерывность лежит по существу в основе одного из доказательств теоремы Римана; см., например, L. Ahlfors, Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1953, где множества равностепенно непрерывных функций называются «нормальными семействами».

ЗАДАЧИ

1. Найдите контрпример к утверждению: каждое симметричное транзитивное отношение рефлексивно. Что неправильно в доказательстве: «из xRy и yRx в силу транзитивности вытекает xRx»?

†*2.* Проверьте, что кандидаты в метрики из примеров 1—3 § I.2 на самом деле метрики.

3. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность Коши в метрическом пространстве $\langle X, \rho\rangle$. Предположим, что $x_{n(i)} \xrightarrow[i\to\infty]{} x_\infty$ для некоторой подпоследовательности $x_{n(i)}$. Докажите, что $x_n \to x_\infty$.

4. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в некотором метрическом пространстве, и пусть x_∞ — заданный элемент. Предположим, что каждая подпоследовательность из x_n имеет подпоследовательность, сходящуюся к x_∞. Докажите, что $x_n \to x_\infty$.

†*5.* Проведите в деталях доказательство теоремы I.3.

†*6.* Докажите теоремы I.4 и I.5.

†*7.* Докажите теорему I.6.

8. Докажите: если $x_n \to x_\infty$ в метрическом пространстве $\langle X, d\rangle$, то $\lim\limits_{n\to\infty} d(x, x_n) = d(x, x_\infty)$ для любого x.

†*9.* Завершите доказательство теоремы I.7.

†*10.* Докажите, что $S[a, b]$ плотно в $PC[a, b]$ по норме $\|\cdot\|_\infty$.

11. (a) Пусть α — функция на $[0, 1]$. Ее называют функцией ограниченной вариации, если существует такое C, что

$$\sum_{i=1}^{n-1} |\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)| \leq C$$

для любой совокупности $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant 1$. Докажите, что любая монотонная функция имеет ограниченную вариацию.

(b) Определим I_α на $S[0, 1]$ равенством

$$I_\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} s_i \chi_i\right)=\sum_{i=1}^{n} s_i\left[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})\right].$$

Докажите, что I_α — ограниченное линейное преобразование тогда и только тогда, когда α имеет ограниченную вариацию.

(c) Пусть α — функция ограниченной вариации на $[0, 1]$. Постройте интеграл Римана — Стильтьеса $\int f d\alpha$.

†*12*. Докажите свойства $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$, сформулированные в дополнении к § I.2.

13. Построим следующим способом множество V (множество Витали). Назовем два числа x, $y \in [0, 1)$ эквивалентными, если разность $x-y$ рациональна. Включим в V ровно по одному числу из каждого класса эквивалентности. Докажите, что V неизмеримо по Лебегу. [*Указание*: докажите, что $[0, 1)$ есть дизъюнктное объединение «трансляций» множества V.]

†*14*. (a) Пусть f — борелева функция. Докажите, что $f^{-1}[B] \in \mathcal{B}$ для любого $B \in \mathcal{B}$.

(b) Пусть f и g — борелевы функции. Докажите, что $f \circ g$ борелева.

15. (a) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$, где r_n, r вещественны. Докажите, что $r=\sup\limits_m \inf\limits_{n>m} r_n$.

(b) Докажите, что если f_n — последовательность функций и $f(x) = \inf f_n(x)$, то

$$f^{-1}[[a, \infty)] = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}[[a, \infty)], \quad f^{-1}[(a, \infty)] = \bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-1}[[a+1/m, \infty)].$$

Выведите отсюда, что точная нижняя грань любой последовательности борелевых функций — борелева функция.

(c) Докажите с помощью (a) и (b), что любой поточечный предел последовательности борелевых функций есть борелева функция.

(d) Выведите с помощью (a) теорему о мажорированной сходимости из теоремы о монотонной сходимости.

**16*. Докажите, что ограниченные борелевы функции на $[0, 1]$ образуют наименьшее семейство $\mathcal{F}$, которое включает в себя $C[0, 1]$ и обладает таким свойством: если f_n — *последовательность* равномерно ограниченных функций из $\mathcal{F}$, таких, что $f_n \longrightarrow f$ поточечно, то $f \in \mathcal{F}$.

†*17*. Докажите следствие теоремы I.12.

†*18*. (a) Докажите, что для любого открытого множества A в $[0, 1]$ функция χ_A есть L^1-предел непрерывных функций.

(b) Пусть B — борелево множество в $[0, 1]$. Докажите, что χ_B есть L^1-предел характеристических функций χ_A открытых множеств A (используйте регулярность меры Лебега).

(c) Докажите, что $C[a, b]$ L^1-плотно в $L^1[a, b]$.

**19*. (a) Пусть $f_n \longrightarrow f$ поточечно и f_n непрерывны. Докажите, что $f^{-1}[[a, \infty)]$ является F_σ-множеством (т. е. счетным объединением замкнутых множеств). (*Указание:* используйте задачу 15a.)

(b) Докажите, что каждое борелево множество на вещественной прямой равно п. в. (относительно меры Лебега) некоторому F_σ, а также равно п. в. некоторому G_δ (т. е. счетному пересечению открытых множеств).

**20*. Функция f называется функцией скачков, если она монотонна и непрерывна всюду, кроме счетного числа точек (скачков), и если f кусочно постоянна на дополнении к этим точкам. Функция f называется сингулярной, если f' существует п. в. и равна нулю п. в. Функция f называется абсолютно непрерывной, если для любого заданного ε можно найти такое δ, что для любого n и точек $x_0, x_1, \ldots, x_{2n+1}$

$$\text{из } \sum_{i=0}^{n} |x_{2i+1}-x_{2i}| < \delta \text{ следует } \sum_{i=0}^{n} |f(x_{2i+1})-f(x_{2i})| < \varepsilon.$$

Докажите, что любая монотонная функция α на $[0, 1]$ может быть (однозначно) представлена в виде $\alpha_{pp}+\alpha_{sing}+\alpha_{ac}$, где α_{pp}—функция скачков, α_{sing} сингулярна и непрерывна, а α_{ac} абсолютно непрерывна.

21. Пусть α—монотонная функция. Предположим, что $\alpha'(x)$ существует п. в. Докажите, что $\alpha(b)-\alpha(a) \geqslant \int\limits_a^b \alpha'(x)\,dx$. Всегда ли имеет место равенство?

†*22.* Докажите, что σ-кольцо замкнуто относительно счетных пересечений.

23. (a) Пусть $\mathcal{S}$ — семейство подмножеств в M. Докажите, что существует наименьшее σ-поле $\mathcal{F}$, содержащее $\mathcal{S}$. Говорят, что $\mathcal{S}$ порождает $\mathcal{F}$.
(b) Пусть $T\colon M \to N$, причем на M и N заданы σ-поля $\mathcal{R}$ и $\mathcal{F}$. Пусть $\mathcal{S}$ порождает $\mathcal{F}$. Докажите, что T измеримо тогда и только тогда, когда $T^{-1}[S] \subset \mathcal{R}$ для всех $S \in \mathcal{S}$.

**24.* Пусть μ, ν—две конечные меры. Докажите, что ν абсолютно непрерывна относительно μ тогда и только тогда, когда $(\forall\varepsilon)(\exists\delta)$ из $\mu(A) < \delta$ вытекает $\nu(A) < \varepsilon$.

25. Рассмотрим функцию $f(x, y)$ на $\mathbb{R}^2$, определенную равенствами

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x>0,\ y>0,\ 0 \leqslant x-y \leqslant 1, \\ -1, & x>0,\ y>0,\ 0 < y-x \leqslant 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Вычислите $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy\right)dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\right)dy$ и прокомментируйте теорему Фубини и теорему I.22.

26. Постройте последовательность непрерывных функций f_n, поточечно сходящуюся к функции f, *не являющейся* непрерывной. Дайте прямое доказательство того, что: (a) сходимость $f_n(x) \to f(x)$ неравномерна по x, (b) семейство f_n не является равностепенно непрерывным.

27. Используйте $\varepsilon/3$-прием для доказательства следующего утверждения. Пусть B—полное нормированное линейное пространство, и пусть T_n — последовательность линейных отображений $T_n\colon B \to B$ с двумя свойствами: (i) T_n равномерно ограничены по n, т. е. $\|T_n\| \leqslant C$, где C не зависит от n; (ii) $T_n x$ сходится для всех x из некоторого плотного в B множества D. Тогда $T_n x$ сходится для каждого x и предельная функция Tx задает ограниченное линейное отображение $T\colon B \to B$.

28. Постройте последовательность $f_n(x)$ ограниченных функций на $[0, 1]$, сходящуюся в L^1 к нулю, но поточечно не сходящуюся ни в одной точке из $[0, 1]$.

†*29.* Используйте $\varepsilon/3$-прием для доказательства теоремы I.26.

30. Метрическое пространство X называется *вполне ограниченным*, если для каждого ε его можно покрыть конечным числом ε-шаров. Докажите, что поточечно сходящаяся равномерно равностепенно непрерывная последовательность функций на вполне ограниченном метрическом пространстве сходится равномерно.

(a) С помощью свойства Гейне—Бореля докажите, что непрерывная на $[0, 1]$ функция равномерно непрерывна.

(b) Докажите, что равностепенно непрерывное семейство функций на $[0, 1]$ равномерно равностепенно непрерывно.

Пусть $F(x, y)$—непрерывная функция на $[0, 1]\times[0, 1]$. Рассмотрим отображение $\mathcal{F}\colon C[0, 1]\longrightarrow C[0, 1]$, задаваемое формулой

$$(\mathcal{F}f)(x)=\int_0^1 F(x, y)\,f(y)\,dy.$$

Докажите, что $\{\mathcal{F}f \mid \|f\|_\infty\leqslant 1\}$—равностепенно непрерывное семейство, так что любая заданная последовательность f_n, для которой $\|f_n\|\leqslant 1$ при всех n, содержит подпоследовательность $f_{n(i)}$ с равномерно сходящимся образом $\mathcal{F}f_{n(i)}$.

Замечание. Именно последнее свойство делает $\mathcal{F}$ отображением, известным под названием компактного (вполне непрерывного) оператора (они рассматриваются в § VI.5). Классическая фредгольмова теория интегральных уравнений основана на том, что $\mathcal{F}$—компактный оператор.

(a) Пусть D—некоторая область на комплексной плоскости. Пусть $\mathcal{F}$—такое семейство аналитических функций на D, что для любого компактного множества $C\subset D$ множество $\{|f(z)| \mid f\in\mathcal{F},\ z\in C\}$ ограничено. С помощью интегральной формулы Коши докажите, что $\mathcal{F}$—равностепенно непрерывное семейство.

(b) Докажите теорему Витали о сходимости: если D—связная область комплексной плоскости и f_n—последовательность аналитических функций на D, равномерно ограниченных на компактных подмножествах в D, и если $f_n(z)$ сходится поточечно для всех z из некоторого подмножества в D, имеющего в D предельную точку, то f_n сходится равномерно на компактных подмножествах к аналитической функции. [*Указание:* используйте задачу 4.]

(c) Докажите теорему Витали с помощью ряда Тейлора и аналитического продолжения.

Замечание. Обсуждение теоремы Витали с точки зрения пункта (c) можно найти в книге: Е. Титчмарш, Теория функций, Гостехиздат, М., 1951.