II. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Господа, в гильбертовом пространстве остается еще много места.

С. МАКЛЕЙН

II.1. Геометрия гильбертова пространства

Конечномерные векторные пространства обладают тремя типами свойств, обобщения которых мы изучим в следующих четырех главах: линейными свойствами, метрическими свойствами и геометрическими свойствами. В этой главе мы займемся векторными пространствами с внутренним произведением, которое представляет собой обобщение обычного скалярного произведения в конечномерных векторных пространствах. Геометрические свойства этих пространств связаны с понятием угла, заложенным в определении внутреннего произведения.

Определение. Комплексное векторное пространство V называется **пространством с внутренним произведением**, если существует комплекснозначная функция $(\cdot, \cdot)$ на $V \times V$, удовлетворяющая следующим четырем условиям при всех $x, y, z \in V$ и $\alpha \in \mathbf{C}$:

(i) $(x, x) \geqslant 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
(ii) $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$;
(iii) $(x, \alpha y) = \alpha (x, y)$;
(iv) $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

Функция $(\cdot, \cdot)$ называется внутренним произведением.

Заметим, что из (ii), (iii) и (iv) следует, что $(x, \alpha y + \beta z) = \alpha (x, y) + \beta (x, z)$ и что $(\alpha x, y) = \bar{\alpha} (x, y)$. Предупреждаем читателя, что в некоторых учебниках пользуются условием, отличным от (iii), а именно определяют внутреннее произведение так, что оно линейно по *первому* вектору и сопряженно-линейно по *второму*.

Пример 1 ($\mathbf{C}^n$). Пусть $\mathbf{C}^n$ обозначает множество всех наборов n комплексных чисел. Для $x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ и $y = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle$ из $\mathbf{C}^n$ положим по определению

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j y_j.$$

Пример 2. Пусть $C[a, b]$ — множество комплекснозначных непрерывных функций на интервале $[a, b]$. Для $f, g \in C[a, b]$

положим

$$(f, g) = \int_a^b \overline{f(x)}\, g(x)\, dx.$$

Теперь мы введем те геометрические понятия, которые имеют смысл в любых пространствах с внутренним произведением.

Определение. Два вектора x и y в пространстве V с внутренним произведением называются **ортогональными**, если $(x, y) = 0$. Набор $\{x_i\}$ векторов в V называется **ортонормированным множеством**, если $(x_i, x_i) = 1$ при всех i и $(x_i, x_j) = 0$, если $j \neq i$.

Введем сокращенное обозначение $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Скоро мы увидим, что $\|\cdot\|$ является на самом деле нормой.

Теорема II.1 (теорема Пифагора). Пусть $\{x_n\}_{n=1}^N$ — ортонормированное множество в пространстве V с внутренним произведением. Тогда для всех $x \in V$

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^N |(x, x_n)|^2 + \left\| x - \sum_{n=1}^N (x_n, x)\, x_n \right\|^2.$$

Доказательство. Запишем x в виде

$$x = \sum_{n=1}^N (x_n, x)\, x_n + \left(x - \sum_{n=1}^N (x_n, x)\, x_n \right).$$

Короткое вычисление, основанное на свойствах внутреннего произведения, показывает, что

$$\sum_{n=1}^N (x_n, x)\, x_n \quad \text{и} \quad x - \sum_{n=1}^N (x_n, x)\, x_n$$

ортогональны. Поэтому

$$(x, x) = \left\| \sum_{n=1}^N (x_n, x)\, x_n \right\|^2 + \left\| x - \sum_{n=1}^N (x_n, x)\, x_n \right\|^2 =$$
$$= \sum_{n=1}^N |(x_n, x)|^2 + \left\| x - \sum_{n=1}^N (x_n, x)\, x_n \right\|^2. \blacksquare$$

Следствие (неравенство Бесселя). Пусть $\{x_n\}_{n=1}^N$ — ортонормированное множество в пространстве V с внутренним произведением. Тогда для всех $x \in V$

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_{n=1}^N |(x, x_n)|^2.$$

Следствие (неравенство Шварца). Если x и y — векторы в пространстве V с внутренним произведением, то

$$|(x,\ y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

Доказательство. Случай $y=0$ тривиален, поэтому положим $y \neq 0$. Вектор $y/\|y\|$ сам по себе образует ортонормированное множество, так что, применяя неравенство Бесселя к любому $x \in V$, получим

$$\|x\|^2 \geqslant |(x,\ y/\|y\|)|^2 = \frac{|(x,\ y)|^2}{\|y\|^2},$$

откуда следует $|(x,\ y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|$. ∎

Еще одно полезное геометрическое равенство — тождество параллелограмма (задача 4):

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

В § I.2 мы определили нормированное линейное пространство и заметили, что всякое такое пространство является метрическим. Следующая теорема показывает, что всякое пространство с внутренним произведением есть нормированное линейное пространство.

Теорема II.2. Всякое пространство V с внутренним произведением есть нормированное линейное пространство с нормой $\|x\| = (x,\ x)^{1/2}$.

Доказательство. Так как V — векторное пространство, нам надо только показать, что $\|\cdot\|$ обладает всеми свойствами нормы. Все эти свойства, за исключением лишь неравенства треугольника, непосредственно следуют из свойств (i) — (iv) внутреннего произведения. Пусть $x,\ y \in V$. Тогда в силу неравенства Шварца

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x,\ x)+(x,\ y)+(y,\ x)+(y,\ y) = \\ &= (x,\ x)+2\,\mathrm{Re}\,(x,\ y)+(y,\ y) \leqslant \\ &\leqslant (x,\ x)+2\,|(x,\ y)|+(y,\ y) \leqslant \\ &\leqslant (x,\ x)+2\,(x,\ x)^{1/2}(y,\ y)^{1/2}+(y,\ y).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|x+y\|^2 \leqslant (\|x\|+\|y\|)^2,$$

что доказывает неравенство треугольника. ∎

Эта теорема показывает, что в V имеется естественная метрика

$$d(x,\ y) = \sqrt{(x-y,\ x-y)}.$$

Тем самым мы получаем понятия сходимости, полноты и плотности, определенные для метрических пространств в § I.2. В частности, мы всегда можем пополнить V до нормированного линейного пространства $\tilde{V}$, в которое V изометрически вложено как плотное подмножество. При этом $\tilde{V}$ — также пространство с внутренним произведением, поскольку внутреннее произведение может быть продолжено с V на $\tilde{V}$ по непрерывности (задача 1).

Определение. Полное пространство с внутренним произведением называется **гильбертовым пространством.** Пространства с внутренним произведением называют иногда предгильбертовыми пространствами.

Определение. Говорят, что два гильбертовых пространства $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ **изоморфны**, если существует линейный оператор U из $\mathscr{H}_1$ *на* $\mathscr{H}_2$, такой, что $(Ux, Uy)_{\mathscr{H}_2} = (x, y)_{\mathscr{H}_1}$ для всех $x, y \in \mathscr{H}_1$. Такой оператор называется **унитарным.**

Мы разовьем введенные понятия в ряде примеров и попутно познакомим читателя с разными типами гильбертовых пространств, которые ему могут встретиться.

Пример 2 (опять L^2). Определим $L^2[a, b]$ как множество комплекснозначных измеримых на конечном интервале $[a, b]$ функций, удовлетворяющих условию $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$. Определим внутреннее произведение формулой

$$(f, g) = \int_a^b \overline{f(x)}\, g(x)\, dx.$$

Заметим, что такое внутреннее произведение имеет смысл, поскольку

$$|\overline{f(x)}\, g(x)| \leqslant \frac{1}{2} |f(x)|^2 + \frac{1}{2} |g(x)|^2,$$

так что $\overline{f(x)}\, g(x)$ принадлежит $L^1[a, b]$. Доказательство, аналогичное доказательству теоремы Рисса—Фишера (теорема I.12), позволяет убедиться в том, что $L^2[a, b]$ полно и есть, таким образом, гильбертово пространство. Не так трудно показать (задача 2), что $L^2[a, b]$ есть пополнение $C[a, b]$ по норме

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Пример 3 (l_2). Определим l_2 как множество последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ комплексных чисел, удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$, с внутренним произведением

$$(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x}_n y_n.$$

В § II.3 мы увидим, что всякое гильбертово пространство, имеющее счетное плотное множество и не являющееся конечномерным, изоморфно l_2. В этом смысле l_2 есть канонический пример гильбертова пространства.

Пример 4 ($L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$). Пусть μ — мера Бореля в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим множество $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$ комплекснозначных измеримых функций на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 d\mu < \infty$. Тогда $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$ есть гильбертово пространство с внутренним произведением

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}\, g(x)\, d\mu.$$

Пример 5 (прямая сумма). Пусть $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ — гильбертовы пространства. Тогда множество пар $\langle x, y\rangle$, где $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$, есть гильбертово пространство с внутренним произведением

$$(\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle) = (x_1, x_2)_{\mathcal{H}_1} + (y_1, y_2)_{\mathcal{H}_2}.$$

Это пространство называется **прямой суммой** пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ и обозначается $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Если μ_1 и μ_2 — взаимно сингулярные меры Бореля на $\mathbb{R}$ и $\mu = \mu_1 + \mu_2$, то $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ естественным образом изоморфно $L^2(\mathbb{R}, d\mu_1) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_2)$ (задача 3). Можно также следующим образом построить счетную прямую сумму. Пусть $\{\mathcal{H}_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность гильбертовых пространств. Обозначим через $\mathcal{H}$ множество последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $x_n \in \mathcal{H}_n$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2_{\mathcal{H}_n} < \infty.$$

Тогда $\mathcal{H}$ есть гильбертово пространство с естественным внутренним произведением; оно записывается в виде

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n.$$

Пример 6 (векторнозначные функции). Пусть $\langle X, \mu\rangle$ есть пространство с мерой и $\mathcal{H}'$ — некоторое гильбертово пространство. Пусть $L^2(X, d\mu; \mathcal{H}')$ есть множество измеримых функций на X со значениями в $\mathcal{H}'$, удовлетворяющих условию

$$\int_X \|f(x)\|^2_{\mathcal{H}'}\, d\mu(x) < \infty.$$

Это множество является гильбертовым пространством с внутренним произведением

$$(f, g) = \int_X (f(x), g(x))_{\mathcal{H}'}\, d\mu(x).$$

Разумеется, следует еще сказать, что понимается под измеримостью для векторнозначных функций. Соответствующее определение и другие родственные вопросы обсуждаются в задаче 12 и в дополнении к § IV.5.

II.2. Лемма Рисса

В примерах § II.1 мы показали несколько различных путей построения новых гильбертовых пространств из данных. Еще один способ получается, если рассмотреть какое-нибудь замкнутое подпространство $\mathcal{M}$ данного гильбертова пространства $\mathcal{H}$. С тем естественным внутренним произведением, которое оно наследует из $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}$ есть гильбертово пространство. Обозначим через $\mathcal{M}^\perp$ множество векторов в $\mathcal{H}$, ортогональных к $\mathcal{M}$; $\mathcal{M}^\perp$ называется **ортогональным дополнением** $\mathcal{M}$. Из линейности внутреннего произведения следует, что $\mathcal{M}^\perp$ есть линейное подпространство в $\mathcal{H}$, и элементарное рассуждение (задача 6) показывает, что $\mathcal{M}^\perp$ замкнуто. Следовательно, $\mathcal{M}^\perp$ — также гильбертово пространство. Подпространства $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^\perp$ имеют единственный общий элемент — нулевой. Теорема, которая приводится ниже, утверждает, что для любого замкнутого собственного подпространства существуют перпендикулярные к нему векторы. На самом деле их столько, что

$$\mathcal{H} = \mathcal{M} + \mathcal{M}^\perp = \{x + y \mid x \in \mathcal{M},\ y \in \mathcal{M}^\perp\}.$$

Это важное геометрическое свойство — одна из главных причин, благодаря которым гильбертовы пространства проще в обращении, чем банаховы (гл. III). При доказательстве следующих леммы и теоремы читатель должен иметь в виду конечномерный пример (см. рис. II.1).

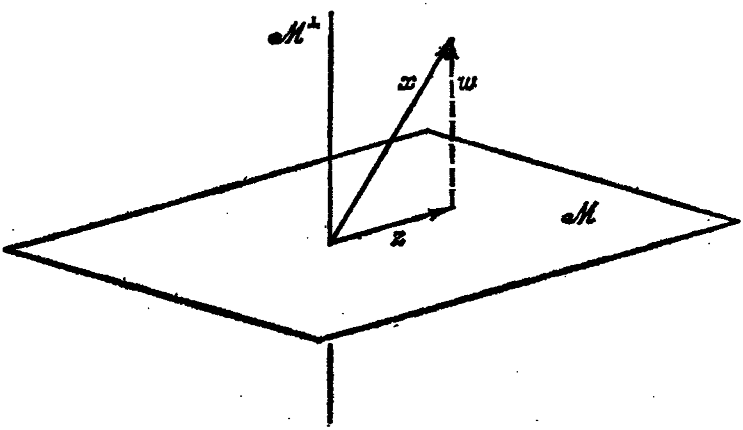

Рис. II.1. Проекция x на $\mathcal{M}$.