Разумеется, следует еще сказать, что понимается под измеримостью для векторнозначных функций. Соответствующее определение и другие родственные вопросы обсуждаются в задаче 12 и в дополнении к § IV.5.

II.2. Лемма Рисса

В примерах § II.1 мы показали несколько различных путей построения новых гильбертовых пространств из данных. Еще один способ получается, если рассмотреть какое-нибудь замкнутое подпространство $\mathscr{M}$ данного гильбертова пространства $\mathscr{H}$. С тем естественным внутренним произведением, которое оно наследует из $\mathscr{H}$, $\mathscr{M}$ есть гильбертово пространство. Обозначим через $\mathscr{M}^{\perp}$ множество векторов в $\mathscr{H}$, ортогональных к $\mathscr{M}$; $\mathscr{M}^{\perp}$ называется **ортогональным дополнением** $\mathscr{M}$. Из линейности внутреннего произведения следует, что $\mathscr{M}^{\perp}$ есть линейное подпространство в $\mathscr{H}$, и элементарное рассуждение (задача 6) показывает, что $\mathscr{M}^{\perp}$ замкнуто. Следовательно, $\mathscr{M}^{\perp}$—также гильбертово пространство. Подпространства $\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}^{\perp}$ имеют единственный общий элемент — нулевой. Теорема, которая приводится ниже, утверждает, что для любого замкнутого собственного подпространства существуют перпендикулярные к нему векторы. На самом деле их столько, что

$$\mathscr{H} = \mathscr{M} + \mathscr{M}^{\perp} = \{x+y \mid x \in \mathscr{M},\ y \in \mathscr{M}^{\perp}\}.$$

Это важное геометрическое свойство — одна из главных причин, благодаря которым гильбертовы пространства проще в обращении, чем банаховы (гл. III). При доказательстве следующих леммы и теоремы читатель должен иметь в виду конечномерный пример (см. рис. II.1).

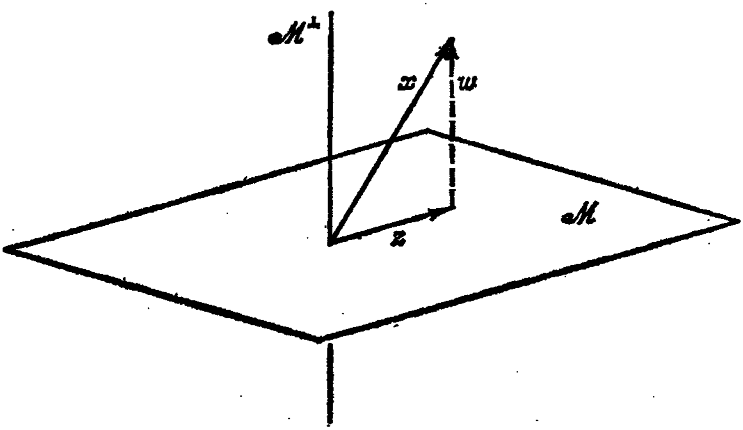

Рис. II.1. Проекция x на $\mathscr{M}$.

Лемма. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $\mathcal{M}$ — его замкнутое подпространство, и пусть $x \in \mathcal{H}$. Тогда в $\mathcal{M}$ существует единственный элемент z, ближайший к x.

Доказательство. Пусть $d = \inf\limits_{y \in \mathcal{M}} \|x-y\|$. Выберем последовательность $\{y_n\}$, $y_n \in \mathcal{M}$, такую, что

$$\|x-y_n\| \to d.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\|y_n-y_m\|^2 &= \|(y_n-x)-(y_m-x)\|^2 = \\ &= 2\|y_n-x\|^2+2\|y_m-x\|^2-\|-2x+y_n+y_m\|^2 = \\ &= 2\|y_n-x\|^2+2\|y_m-x\|^2-4\|x-{}^1/_2(y_n+y_m)\|^2 \leqslant \\ &\leqslant 2\|y_n-x\|^2+\|y_m-x\|^2-4d^2 \xrightarrow[\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}]{} 2d^2+2d^2-4d^2=0.\end{aligned}$$

Второе равенство вытекает из тождества параллелограмма; неравенство следует из того, что ${}^1/_2(y_n+y_m) \in \mathcal{M}$. Таким образом, $\{y_n\}$ — последовательность Коши и, так как $\mathcal{M}$ замкнуто, $\{y_n\}$ сходится к некоторому элементу z из $\mathcal{M}$. Отсюда непосредственно следует, что $\|x-z\| = d$. Доказательство единственности мы оставляем читателю в качестве упражнения. ∎

Теорема II.3 (теорема о проекции). Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $\mathcal{M}$ — его замкнутое подпространство. Тогда любой элемент $x \in \mathcal{H}$ однозначно записывается в виде $x = z + w$, где $z \in \mathcal{M}$, а $w \in \mathcal{M}^\perp$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{H}$. Тогда в силу леммы существует единственный элемент $z \in \mathcal{M}$, ближайший к x. Положим $w = x - z$; тогда мы, очевидно, имеем $x = z + w$. Пусть $y \in \mathcal{M}$ и $t \in \mathbb{R}$. Если $d = \|x-z\|$, то

$$\begin{aligned}d^2 &\leqslant \|x-(z+ty)\|^2 = \|w-ty\|^2 = \\ &= d^2-2t\,\mathrm{Re}\,(w, y)+t^2\|y\|^2.\end{aligned}$$

Значит, $-2t\,\mathrm{Re}\,(w, y)+t^2\|y\|^2 \geqslant 0$ при всех t, откуда следует, что $\mathrm{Re}\,(w, y) = 0$. Подобное рассуждение с заменой t на it показывает, что $\mathrm{Im}\,(w, y) = 0$. Следовательно, $w \in \mathcal{M}^\perp$. Единственность мы предлагаем читателю доказать самостоятельно. ∎

Теорема о проекции устанавливает естественный изоморфизм между $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ и $\mathcal{H}$:

$$\langle z, w\rangle \mapsto z+w.$$

Мы часто будем опускать этот изоморфизм и писать просто $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$.

В § I.2 мы уже определили, что подразумевается под ограниченным линейным преобразованием из одного гильбертова пространства $\mathscr{H}$ в другое $\mathscr{H}'$. Обозначим множество таких преобразований через $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{H}')$. Очевидно, что $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{H}')$ есть векторное пространство; оно становится банаховым пространством, если ввести норму

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_{\mathscr{H}}=1} \|Tx\|_{\mathscr{H}'}.$$

Доказательство этого факта мы отложим до гл. III. Оно не трудно, но там мы сможем сделать это с большей общностью. Пока нас интересует тот специальный случай, когда $\mathscr{H}' = \mathbb{C}$.

Определение. Пространство $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathbb{C})$ называется **сопряженным пространством** к $\mathscr{H}$ и обозначается $\mathscr{H}^*$. Элементы $\mathscr{H}^*$ называются **непрерывными линейными функционалами.**

Следующая важная теорема, характеризующая $\mathscr{H}^*$, установлена Ф. Риссом и М. Фреше.

Теорема II.4 (лемма Рисса). Для всякого $T \in \mathscr{H}^*$ существует единственный элемент $y_T \in \mathscr{H}$, такой, что $T(x) = (y_T, x)$ для всех $x \in \mathscr{H}$. Кроме того, $\|y_T\|_{\mathscr{H}} = \|T\|_{\mathscr{H}^*}$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{N}$ — множество таких $x \in \mathscr{H}$, что $T(x) = 0$. В силу непрерывности T множество $\mathscr{N}$ есть замкнутое подпространство. Если $\mathscr{N} = \mathscr{H}$, то $T(x) = 0 = (0, x)$ для всех x и доказательство закончено. Поэтому допустим, что $\mathscr{N}$ не совпадает с $\mathscr{H}$. Тогда, в силу теоремы о проекции, в $\mathscr{N}^\perp$ есть ненулевой вектор x_0. Положим $y_T = \overline{T(x_0)}\,\|x_0\|^{-2}x_0$. Покажем, что y_T обладает нужными свойствами. Во-первых, если $x \in \mathscr{N}$, то $T(x) = 0 = (y_T, x)$. Далее, если $x = \alpha x_0$, то

$$T(x) = T(\alpha x_0) = \alpha T(x_0) = (\overline{T(x_0)}\,\|x_0\|^{-2}x_0,\ \alpha x_0) = (y_T, \alpha x_0).$$

Так как функции $T(\cdot)$ и $(y_T, \cdot)$ линейны и совпадают на $\mathscr{N}$ и x_0, они должны совпадать и на пространстве, натянутом на $\mathscr{N}$ и x_0. Но $\mathscr{N}$ и x_0 порождают все $\mathscr{H}$, так как каждый элемент $y \in \mathscr{H}$ может быть записан в виде

$$y = \left(y - \frac{T(y)}{T(x_0)}x_0\right) + \frac{T(y)}{T(x_0)}x_0.$$

Значит, $T(x) = (y_T, x)$ для всех $x \in \mathscr{H}$.

Для доказательства равенства $\|T\|_{\mathscr{H}^*} = \|y_T\|_{\mathscr{H}}$ заметим, что

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |T(x)| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |(y_T, x)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|y_T\|\,\|x\| = \|y_T\|$$

и

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |T(x)| \geqslant \left| T\left(\frac{y_T}{\|y_T\|}\right)\right| = \left(y_T, \frac{y_T}{\|y_T\|}\right) = \|y_T\|. \blacksquare$$

Заметим, что из неравенства Шварца следует утверждение, обратное к лемме Рисса. Именно, всякий элемент $y \in \mathscr{H}$ определяет непрерывный линейный функционал T_y на $\mathscr{H}$: $T_y(x) = (y, x)$.

Лемма Рисса имеет следующее важное для приложений

Следствие. Пусть $B(\cdot, \cdot)$ — функция из $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ в $\mathbb{C}$, удовлетворяющая условиям

(i) $B(x, \alpha y + \beta z) = \alpha B(x, y) + \beta B(x, z)$,

(ii) $B(\alpha x + \beta y, z) = \bar{\alpha} B(x, z) + \bar{\beta} B(y, z)$,

(iii) $|B(x, y)| \leqslant C \|x\| \|y\|$

для всех $x, y, z \in \mathscr{H}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Тогда существует единственное ограниченное линейное преобразование A из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}$, такое, что

$$B(x, y) = (Ax, y) \text{ для всех } x, y \in \mathscr{H}.$$

Нормой A является наименьшая константа C, такая, что выполняется (iii).

Доказательство. Фиксируем x; тогда (ii) и (iii) показывают, что $B(x, \cdot)$ — непрерывный линейный функционал на $\mathscr{H}$. Следовательно, в силу леммы Рисса, существует $x' \in \mathscr{H}$, такой, что

$$B(x, y) = (x', y) \text{ для всех } y \in \mathscr{H}.$$

Положим $Ax = x'$. Нетрудно показать, что A — непрерывный линейный оператор с требуемыми свойствами (задача 8). $\blacksquare$

Функция $B(\cdot, \cdot)$ на $\mathscr{H}$, удовлетворяющая условиям (i) и (ii), называется **полуторалинейной формой**.

II.3. Ортонормированные базисы

Мы уже определили, что понимается под ортонормированным множеством векторов. В этом разделе мы разовьем дальше эту идею; в частности, мы распространим понятие «базиса», столь полезное в случае конечномерных векторных пространств, на полные пространства с внутренним произведением. Если S есть ортонормированное множество в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и не существует другого ортонормированного множества, содержащего S как собственное подмножество, то S называется **ортонормированным базисом** (или **полной ортонормированной системой**) пространства $\mathscr{H}$.