и

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |T(x)| \geqslant \left| T\left(\frac{y_T}{\|y_T\|}\right)\right| = \left(y_T, \frac{y_T}{\|y_T\|}\right) = \|y_T\|. \blacksquare$$

Заметим, что из неравенства Шварца следует утверждение, обратное к лемме Рисса. Именно, всякий элемент $y \in \mathscr{H}$ определяет непрерывный линейный функционал T_y на $\mathscr{H}$: $T_y(x) = (y, x)$.

Лемма Рисса имеет следующее важное для приложений

Следствие. Пусть $B(\cdot, \cdot)$—функция из $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ в $\mathbb{C}$, удовлетворяющая условиям

(i) $B(x, \alpha y + \beta z) = \alpha B(x, y) + \beta B(x, z)$,

(ii) $B(\alpha x + \beta y, z) = \bar{\alpha} B(x, z) + \bar{\beta} B(y, z)$,

(iii) $|B(x, y)| \leqslant C\|x\|\|y\|$

для всех $x, y, z \in \mathscr{H}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Тогда существует единственное ограниченное линейное преобразование A из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}$, такое, что

$$B(x, y) = (Ax, y) \text{ для всех } x, y \in \mathscr{H}.$$

Нормой A является наименьшая константа C, такая, что выполняется (iii).

Доказательство. Фиксируем x; тогда (ii) и (iii) показывают, что $B(x, \cdot)$—непрерывный линейный функционал на $\mathscr{H}$. Следовательно, в силу леммы Рисса, существует $x' \in \mathscr{H}$, такой, что

$$B(x, y) = (x', y) \text{ для всех } y \in \mathscr{H}.$$

Положим $Ax = x'$. Нетрудно показать, что A—непрерывный линейный оператор с требуемыми свойствами (задача 8). $\blacksquare$

Функция $B(\cdot, \cdot)$ на $\mathscr{H}$, удовлетворяющая условиям (i) и (ii), называется **полуторалинейной формой.**

II.3. Ортонормированные базисы

Мы уже определили, что понимается под ортонормированным множеством векторов. В этом разделе мы разовьем дальше эту идею; в частности, мы распространим понятие «базиса», столь полезное в случае конечномерных векторных пространств, на полные пространства с внутренним произведением. Если S есть ортонормированное множество в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и не существует другого ортонормированного множества, содержащего S как собственное подмножество, то S называется **ортонормированным базисом** (или **полной ортонормированной системой**) пространства $\mathscr{H}$.

Теорема II.5. Всякое гильбертово пространство $\mathscr{H}$ имеет ортонормированный базис.

Доказательство. Рассмотрим набор $\mathscr{C}$ ортонормированных множеств в $\mathscr{H}$. Упорядочим $\mathscr{C}$ по включению, т. е. будем считать, что $S_1 \prec S_2$, если $S_1 \subset S_2$. С таким определением отношения $\prec$ множество $\mathscr{C}$ становится частично упорядоченным; оно не пусто, так как если v — любой элемент из $\mathscr{H}$, то множество, состоящее из единственного вектора $v/\|v\|$, уже есть ортонормированное множество. Пусть теперь $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — любое линейно упорядоченное подмножество из $\mathscr{C}$. Тогда $\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$ есть ортонормированное множество, содержащее каждое S_α и являющееся, таким образом, верхней гранью для $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Поскольку всякое линейно упорядоченное подмножество из $\mathscr{C}$ имеет верхнюю грань, мы можем применить лемму Цорна (теорема I.2) и заключить, что $\mathscr{C}$ имеет максимальный элемент, т. е. такую ортонормированную систему, которая не содержится как собственное подмножество ни в одной другой ортонормированной системе. ∎

Следующая теорема показывает, что, как и в конечномерном случае, всякий элемент гильбертова пространства может быть представлен в виде линейной комбинации (возможно, бесконечной) элементов базиса.

Теорема II.6. Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство и $S = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — его ортонормированный базис. Тогда для каждого $y \in \mathscr{H}$

$$y = \sum_{\alpha \in A} (x_\alpha, y)\, x_\alpha \tag{II.1}$$

и

$$\|y\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |(x_\alpha, y)|^2. \tag{II.2}$$

Равенство в (II.1) означает, что сумма в правой части сходится (независимо от порядка) к y в $\mathscr{H}$. И обратно — если $\sum_{\alpha \in A} |c_\alpha|^2 < \infty$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$, то $\sum_{\alpha \in A} c_\alpha x_\alpha$ сходится к некоторому элементу из $\mathscr{H}$.

Доказательство. Мы уже убедились в § II.1 (неравенство Бесселя), что для любого конечного подмножества $A' \subset A$ выполняется неравенство $\sum_{\alpha \in A'} |(x_\alpha, y)|^2 \leqslant \|y\|^2$. Следовательно, $(x_\alpha, y) \neq 0$ для не более чем счетного множества индексов α из A, которые мы упорядочим каким-либо образом: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Далее, поскольку $\sum_{j=1}^{N} |(x_{\alpha_j}, y)|^2$ монотонно возрастает и ограничена, она сходится к конечному пределу, когда $N \to \infty$. Пусть $y_n = \sum_{j=1}^{n} (x_{\alpha_j}, y) x_{\alpha_j}$. Тогда при $n > m$

$$\| y_n - y_m \|^2 = \left\| \sum_{j=m+1}^{n} (x_{\alpha_j}, y) x_{\alpha_j} \right\|^2 = \sum_{j=m+1}^{n} |(x_{\alpha_j}, y)|^2.$$

Следовательно, $\{y_n\}$ есть последовательность Коши, и она сходится к элементу y' из $\mathscr{H}$. Заметим, что

$$(y - y', x_{\alpha_l}) = \lim_{n \to \infty} \left(y - \sum_{j=1}^{n} (x_{\alpha_j}, y) x_{\alpha_j}, x_{\alpha_l} \right) = \\ = (y, x_{\alpha_l}) - (y, x_{\alpha_l}) = 0.$$

А если $\alpha \neq \alpha_l$ для какого-либо l, то

$$(y - y', x_\alpha) = \lim_{n \to \infty} \left(y - \sum_{j=1}^{n} (x_{\alpha_j}, y) x_{\alpha_j}, x_\alpha \right) = 0.$$

Следовательно, $y - y'$ ортогонален ко всем x_α из S. Так как S — полная ортонормированная система, должно быть $y - y' = 0$. Итак,

$$y = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} (x_{\alpha_j}, y) x_{\alpha_j}$$

и (II.1) выполняется. Далее,

$$0 = \lim_{n \to \infty} \left\| y - \sum_{j=1}^{n} (x_{\alpha_j}, y) x_{\alpha_j} \right\|^2 = \\ = \lim_{n \to \infty} \left(\| y \|^2 - \sum_{j=1}^{n} |(x_{\alpha_j}, y)|^2 \right) = \\ = \| y \|^2 - \sum_{\alpha \in A} |(x_\alpha, y)|^2,$$

так что (II.2) тоже выполнено. Простое доказательство обратного утверждения мы опускаем. ∎

Заметим, что (II.2) называется равенством Парсеваля. Коэффициенты (x_α, y) часто называют **коэффициентами Фурье** элемента y относительно базиса $\{x_\alpha\}$. Причина такой терминологии скоро выяснится.

Опишем теперь процесс построения ортонормированного множества из произвольной последовательности независимых векторов (ортогонализация Грама—Шмидта). Пусть даны независимые векторы $u_1, u_2, \ldots$; положим

$$\begin{aligned}
w_1 &= u_1, & v_1 &= w_1/\|w_1\|,\\
w_2 &= u_2-(v_1,\ u_2)\,v_1, & v_2 &= w_2/\|w_2\|,\\
&\ \vdots & &\ \vdots\\
w_n &= u_n-\sum_{k=1}^{n-1}(v_k,\ u_n)\,v_k, & v_n &= w_n/\|w_n\|.\\
&\ \vdots & &\ \vdots
\end{aligned}$$

Семейство $\{v_j\}$ есть ортонормированное множество, причем оно обладает тем свойством, что для каждого m множества $\{u_j\}_{j=1}^m$ и $\{v_j\}_{j=1}^m$ порождают одно и то же пространство. В частности, множество конечных линейных комбинаций всех v_j то же, что и множество конечных линейных комбинаций всех u_j (см. рис. II.2).

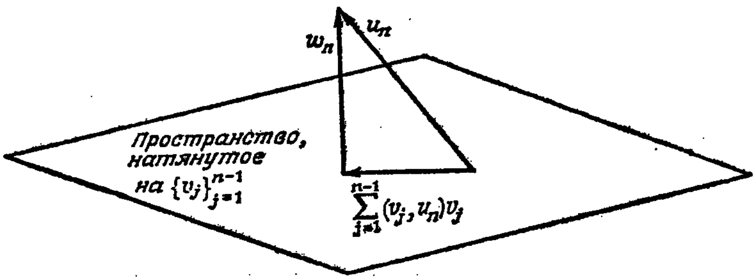

Рис. II.2. Ортогонализация Грама—Шмидта.

Заметим, что полиномы Лежандра (с точностью до постоянных множителей) получаются применением процедуры Грама — Шмидта к функциям $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots$ на интервале $[-1,\ 1]$ с обычным внутренним произведением в L^2.

Определение. Метрическое пространство, имеющее счетное плотное подмножество, называется **сепарабельным**.

Большинство гильбертовых пространств, с которыми приходится практически сталкиваться, сепарабельны. Следующая теорема характеризует их с точностью до изоморфизма.

Теорема II.7. Гильбертово пространство $\mathscr{H}$ сепарабельно тогда и только тогда, когда оно имеет счетный ортонормированный базис S. Если S содержит $N<\infty$ элементов, то $\mathscr{H}$ изоморфно $\mathbb{C}^N$. Если S содержит счетное число элементов, то $\mathscr{H}$ изоморфно l_2 (пример 3 § II.1).

Доказательство. Допустим, что $\mathscr{H}$ сепарабельно и $\{x_n\}$ — счетное плотное множество. Выкидывая некоторые из x_n, мы можем получить подмножество независимых векторов, оболочка которых (совокупность конечных линейных комбинаций) содержит $\{x_n\}$ и, следовательно, плотна. Применяя процедуру Грама — Шмидта к этому подмножеству, мы получим счетную полную ортонормированную систему. Обратно, если $\{y_n\}$ есть полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, то из теоремы II.6 следует, что множество конечных линейных комбинаций y_n с рациональными коэффициентами плотно в $\mathscr{H}$. Так как это множество счетно, $\mathscr{H}$ — сепарабельно.

Предположим, что $\mathscr{H}$ сепарабельно и что $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система. Определим отображение $\mathscr{U}$: $\mathscr{H} \to l_2$ формулой

$$\mathscr{U}: x \to \{(y_n, x)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Теорема II.6 показывает, что это отображение корректно определено и сюръективно. Легко показать, что оно унитарно. Доказательство того, что $\mathscr{H}$ изоморфно $\mathbb{C}^N$, если S состоит из N элементов, аналогично. ∎

Заметим, что в сепарабельном случае процедура Грама — Шмидта позволяет построить ортонормированный базис без обращения к лемме Цорна.

В заключение этого раздела приведем пример, показывающий, как гильбертовы пространства естественно возникают в задачах классического анализа. Если $f(x)$ — интегрируемая функция в интервале $[0, 2\pi]$, то мы можем определить числа

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)\, dx.$$

Формальный ряд $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ называется рядом Фурье для f.

Классическая задача состоит в том, для каких f и в каком смысле ряд Фурье для f сходится к f. Эта задача, зародившаяся у Фурье в 1811 г., имеет богатую событиями историю. Целая область современной математики — абстрактный гармонический анализ — выросла из этой задачи. Некоторые из самых красивых результатов, относящихся к классическому случаю, были доказаны совсем недавно (см. Замечания). Как пример классического результата приведем следующую теорему (задачи 14 и 15):

Теорема II.8. Пусть $f(x)$ — периодическая с периодом 2π непрерывно дифференцируемая функция. Тогда функции $\sum_{-M}^{M} c_n e^{inx}$ равномерно сходятся к $f(x)$ при $M \to \infty$.

Эта теорема дает достаточные условия равномерной сходимости ряда Фурье. Но найти точный класс функций, ряды Фурье которых сходятся равномерно или поточечно, оказалось очень трудно. Однако можно получить простой и красивый ответ на этот вопрос, если изменить самое понятие «сходимости»; тут мы и придем к гильбертову пространству. Набор функций $\{(2\pi)^{-1/2} e^{inx}\}_{-\infty}^{\infty}$ образует ортонормированное множество в $L^2[0, 2\pi]$. Если бы мы знали, что это полное ортонормированное множество, то теорема II.6 позволяла бы заключить, что для всех функций в $L^2[0, 2\pi]$

$$f(x) = \lim_{M \to \infty} \sum_{-M}^{M} (2\pi)^{-1/2} c_n e^{inx}$$

в смысле сходимости по норме L^2. Докажем, что система $\{(2\pi)^{-1/2} e^{inx}\}_{-\infty}^{\infty}$ в самом деле полна, опираясь на приведенную выше классическую теорему.

Теорема II.9. Если $f \in L^2[0, 2\pi]$, то $\sum_{-M}^{M} c_n (2\pi)^{-1/2} e^{inx}$ сходится к f по норме L^2 при $M \to \infty$.

Доказательство. Мы должны установить, что множество $C_p^1[0, 2\pi]$ периодических непрерывно дифференцируемых функций плотно в $L^2[0, 2\pi]$. В задаче 2 от читателя требуется показать, что в $L^2[0, 2\pi]$ плотны ступенчатые функции. Но ступенчатую функцию можно аппроксимировать (в L^2) функцией из $C_p^1[0, 2\pi]$, если сгладить ее углы и изменить значение на одном конце, чтобы она стала периодической. Читатель должен убедиться, что при этом можно получить функцию, сколь угодно близкую к ступенчатой по норме L^2.

Убедимся в том, что $\{(2\pi)^{-1/2} e^{inx}\}_{-\infty}^{\infty}$ есть полное множество; достаточно показать, что из $(e^{inx}, g) = 0$ при всех n следует $g = 0$. Предположим, что $f \in C_p^1[0, 2\pi]$; тогда в силу теоремы II.8

$$\sum_{-M}^{M} c_n (2\pi)^{-1/2} e^{inx} \to f$$

равномерно, а значит, и в смысле L^2. Следовательно,

$$(f, g) = \lim_{M \to \infty} \left(\sum_{-M}^{M} c_n (2\pi)^{-1/2} e^{inx}, g \right) = 0,$$

если $(e^{inx}, g)=0$ при всех n. Но тогда g ортогональна ко всем f из плотного множества $C_p^1[0, 2\pi]$, откуда вытекает, что $g=0$. Итак, $\{(2\pi)^{-1/2} e^{inx}\}_{-\infty}^{\infty}$ есть полное ортонормированное множество, и из теоремы II.6 следует, что ряд Фурье любой функции из $L^2[0, 2\pi]$ сходится к этой функции по норме L^2. ∎

Эта теорема показывает, что естественное понятие сходимости рядов Фурье—это сходимость в L^2, и иллюстрирует один из основных принципов функционального анализа: следует выбирать абстрактное пространство и понятие сходимости, подходящие для данной задачи,—такое пространство, в котором можно доказать хорошие теоремы. Поступая таким образом, мы избегаем многих трудностей; это имеет свои преимущества, но и свои недостатки.

II.4. Тензорные произведения гильбертовых пространств

В § II.1 и II.2 мы описали некоторые способы построения новых гильбертовых пространств из данных. Теперь мы опишем тензорное произведение $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ двух гильбертовых пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Мы приведем хотя и не самую красивую, зато очень ясную конструкцию, и читатель сможет без труда строить тензорные произведения $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$ любого конечного числа гильбертовых пространств.

Пусть $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$—гильбертовы пространства. Для любых $\varphi_1 \in \mathcal{H}_1$ и $\varphi_2 \in \mathcal{H}_2$ обозначим через $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ сопряженную билинейную форму, действующую на $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ так:

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(\langle \psi_1, \psi_2 \rangle) = (\psi_1, \varphi_1)(\psi_2, \varphi_2).$$

Пусть $\mathcal{E}$—множество конечных линейных комбинаций таких сопряженных билинейных форм; определим внутреннее произведение $(\cdot, \cdot)$ на $\mathcal{E}$, полагая

$$(\varphi \otimes \psi, \eta \otimes \mu) = (\varphi, \eta)(\psi, \mu)$$

и продолжая это равенство по линейности.

Предложение 1. $(\cdot, \cdot)$ корректно определено и положительно определено.

Доказательство. Убедимся, что (λ, λ') не зависит от того, при помощи каких линейных комбинаций выражены λ и λ'. Для этого достаточно показать, что если μ—конечная сумма, с помощью которой выражена нулевая форма, то $(\eta, \mu)=0$ для всех