если $(e^{inx}, g) = 0$ при всех n. Но тогда g ортогональна ко всем f из плотного множества $C_p^1[0, 2\pi]$, откуда вытекает, что $g = 0$. Итак, $\{(2\pi)^{-1/2} e^{inx}\}_{-\infty}^{\infty}$ есть полное ортонормированное множество, и из теоремы II.6 следует, что ряд Фурье любой функции из $L^2[0, 2\pi]$ сходится к этой функции по норме L^2. ∎

Эта теорема показывает, что естественное понятие сходимости рядов Фурье—это сходимость в L^2, и иллюстрирует один из основных принципов функционального анализа: следует выбирать абстрактное пространство и понятие сходимости, подходящие для данной задачи,—такое пространство, в котором можно доказать хорошие теоремы. Поступая таким образом, мы избегаем многих трудностей; это имеет свои преимущества, но и свои недостатки.

II.4. Тензорные произведения гильбертовых пространств

В § II.1 и II.2 мы описали некоторые способы построения новых гильбертовых пространств из данных. Теперь мы опишем тензорное произведение $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ двух гильбертовых пространств $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$. Мы приведем хотя и не самую красивую, зато очень ясную конструкцию, и читатель сможет без труда строить тензорные произведения $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2 \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_n$ любого конечного числа гильбертовых пространств.

Пусть $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$—гильбертовы пространства. Для любых $\varphi_1 \in \mathscr{H}_1$ и $\varphi_2 \in \mathscr{H}_2$ обозначим через $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ сопряженную билинейную форму, действующую на $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$ так:

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(\langle \psi_1, \psi_2 \rangle) = (\psi_1, \varphi_1)(\psi_2, \varphi_2).$$

Пусть $\mathscr{E}$—множество конечных линейных комбинаций таких сопряженных билинейных форм; определим внутреннее произведение $(\cdot, \cdot)$ на $\mathscr{E}$, полагая

$$(\varphi \otimes \psi, \eta \otimes \mu) = (\varphi, \eta)(\psi, \mu)$$

и продолжая это равенство по линейности.

Предложение 1. $(\cdot, \cdot)$ корректно определено и положительно определено.

Доказательство. Убедимся, что (λ, λ') не зависит от того, при помощи каких линейных комбинаций выражены λ и λ'. Для этого достаточно показать, что если μ—конечная сумма, с помощью которой выражена нулевая форма, то $(\eta, \mu) = 0$ для всех

$\eta \in \mathscr{E}$. Положим $\eta = \sum_{i=1}^{N} c_i (\varphi_i \otimes \psi_i)$; тогда

$$\begin{aligned}(\eta, \mu) &= \left(\sum_{i=1}^{N} c_i (\varphi_i \otimes \psi_i),\ \mu\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{N} c_i \mu(\langle \varphi_i,\ \psi_i \rangle) = \\ &= 0,\end{aligned}$$

поскольку μ — нулевая форма. Значит, $(\cdot,\ \cdot)$ определено корректно.

Предположим теперь, что $\lambda = \sum_{k=1}^{M} d_k (\eta_k \otimes \mu_k)$. Тогда $\{\eta_k\}_{k=1}^{M}$ и $\{\mu_k\}_{k=1}^{M}$ порождают подпространства $M_1 \subset \mathscr{H}_1$ и $M_2 \subset \mathscr{H}_2$ соответственно. Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N_1}$ и $\{\psi_l\}_{l=1}^{N_2}$ — ортонормированные базисы для M_1 и M_2; тогда каждое η_k можно выразить через φ_j, а каждое μ_k через ψ_l. Получим

$$\lambda = \sum_{j=1,\ l=1}^{N_1,\ N_2} c_{jl} (\varphi_j \otimes \psi_l).$$

Но

$$\begin{aligned}(\lambda, \lambda) &= \left(\sum c_{jl} (\varphi_j \otimes \psi_l),\ \sum c_{im} (\varphi_i \otimes \psi_m)\right) = \\ &= \sum \overline{c_{jl}} c_{im} (\varphi_j,\ \varphi_i)(\psi_l,\ \psi_m) = \sum_{j,\ l} |c_{jl}|^2;\end{aligned}$$

отсюда видно, что если $(\lambda, \lambda) = 0$, то все $c_{jl} = 0$ и λ — нулевая форма. Следовательно, форма $(\cdot,\ \cdot)$ положительно определена. ∎

Определение. Пусть $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ — пополнение $\mathscr{E}$ по определенному выше внутреннему произведению $(\cdot,\ \cdot)$; $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ называется **тензорным произведением** $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$.

Предложение 2. Если $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_l\}$ — ортонормированные базисы в $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ соответственно, то $\{\varphi_k \otimes \psi_l\}$ есть ортонормированный базис в $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$.

Доказательство. Для упрощения обозначений рассмотрим случай, когда оба $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ бесконечномерны и сепарабельны (в остальных случаях ничего не меняется). Ясно, что множество $\{\varphi_k \otimes \psi_l\}$ ортонормировано, и, значит, достаточно показать, что $\mathscr{E}$ содержится в замкнутом пространстве S, натянутом на семейство $\{\varphi_k \otimes \psi_l\}$. Пусть $\varphi \otimes \psi \in \mathscr{E}$. Так как $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_l\}$ — базисы, то $\varphi = \sum c_k \varphi_k$ и $\psi = \sum d_l \psi_l$, причем $\sum |c_k|^2 < \infty$ и $\sum |d_l|^2 < \infty$. Значит, $\sum_{k,\ l} |c_k d_l|^2 < \infty$. Следовательно, по теореме II.6 в S существует вектор $\mu=\sum_{k,l} c_k d_l \varphi_k \otimes \psi_l$. Прямое вычисление показывает, что

$$\Big\| \varphi \otimes \psi - \sum_{\substack{k<M\\ l<N}} c_k d_l \varphi_k \otimes \psi_l \Big\| \to 0$$

при $M, N \to \infty$. ∎

Покажем, каким образом естественно возникают тензорные произведения; для этого обратимся к тем гильбертовым пространствам, с которыми читатель уже знаком. Пусть сначала $\langle M_1, \mu_1\rangle$ и $\langle M_2, \mu_2\rangle$ — пространства с мерой. Предположим, что $L^2(M_1, d\mu_1)$ и $L^2(M_2, d\mu_2)$ сепарабельны (см. задачи 24 и 25 к этой главе и задачу 43 гл. IV). Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ и $\{\psi_l(y)\}$ — базисы в $L^2(M_1, d\mu_1)$ и в $L^2(M_2, d\mu_2)$ соответственно. Тогда $\{\varphi_k(x)\psi_l(y)\}$ — ортонормированное множество в $L^2(M_1\times M_2, d\mu_1\otimes d\mu_2)$. Покажем, что на самом деле это базис. Допустим, что $f(x, y)\in L^2(M_1\times M_2, d\mu_1\otimes d\mu_2)$ и что

$$\iint_{M_1\times M_2} \overline{f(x, y)}\, \varphi_k(x)\, \psi_l(y)\, d\mu_1(x)\, d\mu_2(y)=0$$

для всех k и l. По теореме Фубини получаем

$$\int_{M_2} \left(\int_{M_1} \overline{f(x, y)}\, \varphi_k(x)\, d\mu_1(x)\right) \psi_l(y)\, d\mu_2(y)=0.$$

Так как $\{\psi_l\}$ — базис в $L^2(M_2, d\mu_2)$, то

$$\int_{M_1} \overline{f(x, y)}\, \varphi_k(x)\, d\mu_1(x)=0$$

всюду, кроме множества $S_k\subset M_2$, для которого $\mu_2(S_k)=0$. Значит, если $y\notin \bigcup S_k$, то $\int_{M_1} f(x, y)\,\varphi_k(x)\,d\mu_1(x)=0$ при всех k, откуда видно, что $f(x, y)=0$ п. в. по мере μ_1. Следовательно, $f(x, y)=0$ п. в. по мере $\mu_1\otimes\mu_2$. Таким образом, $\{\varphi_k(x)\psi_l(y)\}$ — базис в $L^2(M_1\times M_2, d\mu_1\otimes d\mu_2)$.

Определим теперь отображение

$$U\colon\ \varphi_k\otimes\psi_l \mapsto \varphi_k(x)\,\psi_l(y).$$

Оно переводит ортонормированный базис пространства $L^2(M_1, d\mu_1)\otimes L^2(M_2, d\mu_2)$ в ортонормированный базис пространства $L^2(M_1\times M_2, d\mu_1\otimes d\mu_2)$ и однозначно продолжается до унитарного отображения

$$L^2(M_1, d\mu_1)\otimes L^2(M_2, d\mu_2) \text{ на } L^2(M_1\times M_2, d\mu_1\otimes d\mu_2).$$

Заметим, что если $f\in L^2(M_1, d\mu_1)$, $g\in L^2(M_2, d\mu_2)$, то

$$U(f\otimes g)=U\left(\sum c_k\varphi_k\otimes\sum d_l\psi_l\right)=U\left(\sum_{k,l} c_kd_l\varphi_k\otimes\psi_l\right)=$$
$$=\sum_{k,l} c_kd_l\varphi_k(x)\,\psi_l(y)=f(x)\,g(y).$$

Из-за этого свойства часто говорят, что $L^2(M_1\times M_2, d\mu_1\otimes d\mu_2)$ и $L^2(M_1, d\mu_1)\otimes L^2(M_2, d\mu_2)$ «естественно» изоморфны. Пусть $M_i=\mathbb{R}$ и μ_i—мера Лебега; тогда мы показали, что $L^2(\mathbb{R}^2)$ естественно изоморфно $L^2(\mathbb{R})\otimes L^2(\mathbb{R})$.

Вернемся теперь к примеру 6 § II.1: $\langle M, \mu\rangle$—пространство с мерой и $\mathcal{H}'$—сепарабельное гильбертово пространство с базисом $\{\varphi_k\}$. В задаче 12 от читателя требуется показать, что каждый элемент $g\in L^2(M, d\mu; \mathcal{H}')$ есть предел

$$g(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}(\varphi_k, g(x))_{\mathcal{H}'}\varphi_k$$

конечных линейных комбинаций векторов вида $f_k(x)\varphi_k$, где $f_k(x)\in L^2(M, d\mu)$. Определим теперь отображение

$$U\colon \sum_{k=1}^{M} f_k(x)\otimes\varphi_k\longrightarrow\sum_{k=1}^{N} f_k(x)\,\varphi_k.$$

Оно корректно определено и отображает плотное множество в $L^2(M, d\mu)\otimes\mathcal{H}'$ на плотное множество в $L^2(M, d\mu; \mathcal{H}')$, сохраняя норму; следовательно, U однозначно продолжается до унитарного оператора из $L^2(M, d\mu)\otimes\mathcal{H}'$ на $L^2(M, d\mu; \mathcal{H}')$. Заметим, что при этом $U(f(x)\otimes\varphi)=f(x)\varphi$ для всех $\varphi\in\mathcal{H}'$. В этом смысле U называется естественным изоморфизмом между $L^2(M, d\mu)\otimes\mathcal{H}'$ и $L^2(M, d\mu; \mathcal{H}')$. Подытожим это обсуждение в следующей теореме:

Теорема II.10. Пусть $\langle M_1, \mu_1\rangle$ и $\langle M_2, \mu_2\rangle$—пространства с мерой, такие, что $L^2(M_1, d\mu_1)$ и $L^2(M_2, d\mu_2)$ сепарабельны. Тогда:

(a) Существует единственный изоморфизм между $L^2(M_1, d\mu_1)\otimes L^2(M_2, d\mu_2)$ и $L^2(M_1\times M_2, d\mu_1\otimes d\mu_2)$, такой, что $f\otimes g\mapsto fg$.

(b) Если $\mathcal{H}'$—сепарабельное гильбертово пространство, то существует единственный изоморфизм между $L^2(M_1, d\mu_1)\otimes\mathcal{H}'$ и $L^2(M_1, d\mu_1; \mathcal{H}')$, такой, что $f(x)\otimes\varphi\mapsto f(x)\varphi$.

(c) Существует единственный изоморфизм между $L^2(M_1\times M_2, d\mu_1\otimes d\mu_2)$ и $L^2(M_1, d\mu_1; L^2(M_2, d\mu_2))$, такой, что $f(x, y)$ переводится в функцию $x\mapsto f(x, \cdot)$.

Пример 1. Гильбертовым пространством состояний при квантово-механическом описании одной шредингеровой частицы со спином 1/2 является $L^2(\mathbb{R}^3, dx; \mathbb{C}^2)$, т. е. множество пар $\{\psi_1(x), \psi_2(x)\}$ квадратично интегрируемых функций (dx—мера Лебега).

3*

В силу установленного выше, $L^2(\mathbb{R}^3, dx; \mathbb{C}^2)$ естественно изоморфно $L^2(\mathbb{R}^3)\otimes\mathbb{C}^2$.

Пример 2 (пространства Фока). Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство; обозначим через $\mathscr{H}^n$ n-кратное тензорное произведение $\mathscr{H}^n = \mathscr{H}\otimes\mathscr{H}\otimes\ldots\otimes\mathscr{H}$. Положим $\mathscr{H}^0 = \mathbb{C}$ и

$$\mathscr{F}(\mathscr{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}^n.$$

$\mathscr{F}(\mathscr{H})$ называется пространством Фока над $\mathscr{H}$; оно сепарабельно, если сепарабельно $\mathscr{H}$. Например, если $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$, то элемент $\psi\in\mathscr{F}(\mathscr{H})$ есть последовательность функций

$$\psi = \{\psi_0, \psi_1(x_1), \psi_2(x_1, x_2), \psi_3(x_1, x_2, x_3), \ldots\},$$

такая, что

$$|\psi_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_n(x_1, \ldots, x_n)|^2 dx_1\ldots dx_n < \infty.$$

Обычно в квантовой теории поля употребляется не само $\mathscr{F}(\mathscr{H})$, а два его подпространства. Эти подпространства строятся так. Пусть $\mathscr{P}_n$ — группа перестановок n элементов, и пусть $\{\varphi_k\}$ — базис в $\mathscr{H}$. Для каждого $\sigma\in\mathscr{P}_n$ определим оператор (будем обозначать его тоже σ) на базисных элементах $\mathscr{H}^n$, полагая

$$\sigma(\varphi_{k_1}\otimes\varphi_{k_2}\otimes\ldots\otimes\varphi_{k_n}) = \varphi_{k_{\sigma(1)}}\otimes\varphi_{k_{\sigma(2)}}\otimes\ldots\otimes\varphi_{k_{\sigma(n)}}.$$

Оператор σ по линейности продолжается до ограниченного (с единичной нормой) оператора на $\mathscr{H}^n$, и можно положить $S_n = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_n}\sigma$.

Легко показать (задача 23), что $S_n^2 = S_n$ и $S_n^* = S_n$, так что S_n — ортогональный проектор (читатель, незнакомый с сопряженными операторами и с ортогональными проекторами, пусть поищет их определения и элементарные свойства в гл. VI). Область значений оператора S_n называется n-кратным симметричным тензорным произведением $\mathscr{H}$. Если $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$ и $\mathscr{H}^n = L^2(\mathbb{R})\otimes\ldots\otimes L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}^n)$, то $S_n\mathscr{H}^n$ есть подпространство в $L^2(\mathbb{R}^n)$, состоящее из всех функций, инвариантных относительно любых перестановок их аргументов. Положим теперь

$$\mathscr{F}_s(\mathscr{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n\mathscr{H}^n.$$

$\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$ называется **симметричным пространством Фока над** $\mathscr{H}$, или **бозонным пространством Фока над** $\mathscr{H}$.

Пусть $\varepsilon(\cdot)$ — функция из $\mathscr{P}_n$ в $\{1, -1\}$, равная 1 на четных и -1 на нечетных перестановках. Положим $A_n = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}_n}\varepsilon(\sigma)\sigma$;

тогда A_n есть ортогональный проектор в $\mathscr{H}^n$. Его область значений $A_n\mathscr{H}^n$ называется n-кратным антисимметричным тензорным произведением $\mathscr{H}$. Если $\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R})$, то $A_n\mathscr{H}^n$ есть подпространство в $L^2(\mathbb{R}^n)$, состоящее из функций, нечетных относительно перестановки двух координат. Подпространство

$$\mathscr{F}_a(\mathscr{H})=\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n\mathscr{H}^n$$

называется **антисимметричным пространством Фока над** $\mathscr{H}$, **или фермионным пространством Фока над** $\mathscr{H}$.

II.5. Эргодическая теория. Введение

В этом разделе мы кратко обсудим эргодическую теорию. Для этого потребуются некоторые понятия, которые мы строго определим только в гл. VI: сопряженные операторы, проекторы, ядро и область значений оператора. Читатели, еще не знакомые с этими понятиями, должны заглянуть в гл. VI. Но мы хотим привести это обсуждение именно здесь, так как эргодическая теория хорошо иллюстрирует силу и слабость методов гильбертова пространства и дает прекрасный пример взаимосвязи функционального анализа и математической физики—главной темы всего нашего курса. Как мы увидим, вопрос о том, почему макроскопическая система стремится к равновесию, очень удобно формулировать на языке абстрактных пространств, но за это приходится платить: естественный вопрос в абстрактной постановке слегка отличен от исходного, и может возникнуть соблазн удовлетвориться более слабыми результатами.

Утверждение «любая система приближается к равновесному состоянию» называют иногда нулевым началом термодинамики. С микроскопической точки зрения, пожалуй, удивительно, что любая система должна приближаться к равновесию, поскольку микроскопически нет никакого стационарного состояния и, следовательно, никакого равновесного состояния. Тем не менее любая попытка микроскопического обоснования термодинамики должна объяснить, почему нулевое начало макроскопически выполняется. Среди физиков далеко нет общего мнения по поводу того, что именно составляет обоснование нулевого начала, но мы не хотим вдаваться в обсуждение всех pro и contra многих различных подходов, которые предлагались (см., впрочем, Замечания). Подход, которым мы ниже пользуемся, в общем принимается большинством физиков.

Первая основная идея состоит в том, что термодинамические системы подвержены флуктуациям (см. задачу 17). Иными сло-