тогда A_n есть ортогональный проектор в $\mathscr{H}^n$. Его область значений $A_n\mathscr{H}^n$ называется n-кратным антисимметричным тензорным произведением $\mathscr{H}$. Если $\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R})$, то $A_n\mathscr{H}^n$ есть подпространство в $L^2(\mathbb{R}^n)$, состоящее из функций, нечетных относительно перестановки двух координат. Подпространство

$$\mathscr{F}_a(\mathscr{H})=\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n\mathscr{H}^n$$

называется **антисимметричным пространством Фока над** $\mathscr{H}$, или **фермионным пространством Фока над** $\mathscr{H}$.

II.5. Эргодическая теория. Введение

В этом разделе мы кратко обсудим эргодическую теорию. Для этого потребуются некоторые понятия, которые мы строго определим только в гл. VI: сопряженные операторы, проекторы, ядро и область значений оператора. Читатели, еще не знакомые с этими понятиями, должны заглянуть в гл. VI. Но мы хотим привести это обсуждение именно здесь, так как эргодическая теория хорошо иллюстрирует силу и слабость методов гильбертова пространства и дает прекрасный пример взаимосвязи функционального анализа и математической физики—главной темы всего нашего курса. Как мы увидим, вопрос о том, почему макроскопическая система стремится к равновесию, очень удобно формулировать на языке абстрактных пространств, но за это приходится платить: естественный вопрос в абстрактной постановке слегка отличен от исходного, и может возникнуть соблазн удовлетвориться более слабыми результатами.

Утверждение «любая система приближается к равновесному состоянию» называют иногда нулевым началом термодинамики. С микроскопической точки зрения, пожалуй, удивительно, что любая система должна приближаться к равновесию, поскольку микроскопически нет никакого стационарного состояния и, следовательно, никакого равновесного состояния. Тем не менее любая попытка микроскопического обоснования термодинамики должна объяснить, почему нулевое начало макроскопически выполняется. Среди физиков далеко нет общего мнения по поводу того, что именно составляет обоснование нулевого начала, но мы не хотим вдаваться в обсуждение всех pro и contra многих различных подходов, которые предлагались (см., впрочем, Замечания). Подход, которым мы ниже пользуемся, в общем принимается большинством физиков.

Первая основная идея состоит в том, что термодинамические системы подвержены флуктуациям (см. задачу 17). Иными словами, в силу самой своей природы законы термодинамики — это не абсолютные утверждения о системе в некий фиксированный момент времени; они относятся к измерениям, проведенным за отрезки времени, длинные по сравнению с некоторыми характерными периодами, например временем столкновения или временем релаксации. Таким образом, термодинамика имеет дело с измерениями наблюдаемых величин, усредненными по некоторому периоду T. Поскольку времена столкновений и т. п. зависят от динамики, то можно надеяться доказать термодинамические утверждения лишь в отношении предела при $T \to \infty$. Как велико должно быть T, чтобы среднее по интервалу T было приближенно равно предельному значению, — вопрос микродинамики, но в некоторых специальных случаях можно надеятся кое-что доказать.

Пусть состояние классической механической системы изображается точкой в некотором фазовом пространстве Γ. Для каждого момента времени t существует отображение T_t: $\Gamma \to \Gamma$, где $T_t x$ — состояние, которое возникает к моменту t_0+t из состояния x в момент t_0 (мы предполагаем трансляционную инвариантность по времени, поэтому t_0 не входит в качестве аргумента). Очевидно, что $T_{t+s} = T_t T_s$. В классической механике такие наблюдаемые величины системы, как энергия или угловой момент, суть функции на фазовом пространстве. Итак, мы видим, что имеет смысл изучать

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(T_t x)\, dt.$$

Мы хотим показать, что этот предел существует, по крайней мере для непрерывных функций. Обычно Γ — метрическое пространство, так что «непрерывность» имеет смысл. Но мы хотим, чтобы предел не только существовал, но еще и не зависел от начальной точки x, или по меньшей мере зависел только от нескольких «макроскопических» наблюдаемых, которые мы можем связать с равновесным состоянием. Для систем, инвариантных относительно сдвигов по времени, энергия — сохраняющаяся величина, так что средняя энергия совпадает с начальной. Следовательно, для каждой энергии E мы рассматриваем поверхность постоянной энергии Ω_E в фазовом пространстве и надеемся, что для каждого $w \in \Omega_E$ и каждой непрерывной функции f на Ω_E

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(T_t w)\, dt$$

существует и равен числу $\mu(f)$, не зависящему от w. Тогда отображение $f \mapsto \mu(f)$, очевидно, обладает такими свойствами:

(a) $\mu(1) = 1$,
(b) μ линейно,
(c) $\mu(f) \geqslant 0$, если $f \geqslant 0$.

Со временем мы увидим (§ IV.4), что такое μ всегда связано с некоторой мерой $\hat{\mu}$ на Ω_E, нормированной условием $\hat{\mu}(\Omega_E) = 1$, так что

$$\mu(f) = \int\limits_{\Omega_E} f(\omega)\, d\hat{\mu}(\omega).$$

Впредь мы будем обозначать линейный функционал μ и меру $\hat{\mu}$ одной буквой μ.

Подведем итог: мы показали, что если

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(T_t\omega)\, dt$$

существует для каждого фиксированного ω и не зависит от $\omega \in \Omega_E$, то существует мера μ на Ω_E, такая, что

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(T_t\omega)\, dt = \int\limits_{\Omega_E} f(\omega)\, d\mu(\omega). \tag{II.3}$$

Мера μ обладает одним очень важным свойством. Пусть фиксировано некоторое s, и пусть χ_F—характеристическая функция измеримого множества $F \subset \Omega_E$. Тогда

$$\frac{1}{T} \int\limits_0^T \chi_{T_s^{-1}F}(T_t\omega)\, dt = \frac{1}{T} \int\limits_0^T \chi_F(T_sT_t\omega)\, dt,$$

так что если существует $\lim\limits_{T\to\infty}$, то $\mu(T_s^{-1}F) = \mu(F)$, т. е. эта мера **инвариантна**. Или, иными словами, T **сохраняет меру**. Классические механические системы наделены естественной инвариантной мерой: если $\Gamma = \mathbb{R}^{6N}$ (N—число частиц), то мера $d^{3N}q\, d^{3N}p$, как известно, инвариантна относительно гамильтонова потока (теорема Лиувилля). Сужение этой меры на Ω_E формально задается формулой

$$\mu_E(F) = \int\limits_F \delta(H(p, q) - E)\, d^{3N}q\, d^{3N}p,$$

где H—гамильтониан. В явном виде, если мы выберем систему ортонормированных локальных координат в $x \in \Omega_E$, скажем $Q_1, \ldots, Q_{6N-1}$, то

$$d\mu_E = C d^{6N-1}Q / |\operatorname{grad} H|.$$

Постоянная C выбирается так, что $\mu_E(\Omega_E)=1$. Таким образом, задача обоснования нулевого начала сводится к тому, чтобы рассмотреть

$$(M_T f)(w)=\frac{1}{T}\int_0^T f(T_t w)\,dt$$

и доказать, что в каком-то разумном смысле функция $(M_T f)(w)$ сходится при $T\to\infty$ к постоянной функции со значением

$$\int_{\Omega_E} f(w)\,d\mu_E(w).$$

Заметим, что если бы это удалось, то доказано было бы значительно больше: не только, что измерения за большие периоды времени не зависят от начальных условий (кроме энергии), но также и то, что равновесное состояние описывается мерой в фазовом пространстве и эта мера есть

$$\int_F \delta(H(p, q)-E)\,d^{3N}p\,d^{3N}q$$

— так называемый «микроканонический ансамбль».

Методы гильбертовых пространств—настолько мощный инструмент, что, коль скоро мы уже имеем меру, возникает желание попробовать переформулировать всю задачу в терминах $L^2(\Omega_E, d\mu_E)$. Итак, если $f\in L^2(\Omega_E, d\mu_E)$, определим отображение $U_t\colon f\mapsto f\circ T_t$, т. е.

$$(U_t f)(w)=f(T_t w).$$

Лемма (лемма Купмана). U_t есть унитарное отображение $L^2(\Omega_E, d\mu_E)$ на $L^2(\Omega_E, d\mu_E)$.

Доказательство.
$$\begin{aligned}(U_t f, U_t g) &= \int_{\Omega_E}\overline{f(T_t w)}\,g(T_t w)\,d\mu_E(w)=\\ &=\int_{\Omega_E}\overline{f(y)}\,g(y)\,d\mu_E(T_t^{-1}y)=\\ &=\int_{\Omega_E}\overline{f(y)}\,g(y)\,d\mu_E(y)=(f, g),\end{aligned}$$

где мы воспользовались инвариантностью меры μ_E. Так как $U_tU_{-t}=U_0=I$, то U обратим и, значит, унитарен. ∎

Мы хотим изучить

$$\frac{1}{T}\int_0^T (U_t f)(w)\,d\mu(w),$$

но проще рассмотреть дискретный аналог этого выражения

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} U^m f.$$

Следующий элегантный результат решает вопрос о сходимости в дискретном случае. В задаче 18 результат с дискретного случая распространяется на непрерывный.

Теорема II.11 (статистическая эргодическая теорема, или эргодическая теорема фон Неймана). Пусть U — унитарный оператор на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть P — ортогональный проектор на $\{\psi \mid \psi\in\mathscr{H},\ U\psi=\psi\}$. Тогда для любого $f\in\mathscr{H}$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U^n f = Pf.$$

Докажем сначала элементарную техническую лемму.

Лемма. (a) Если U унитарен, то $Uf=f$ тогда и только тогда, когда $U^*f=f$.

(b) Для любого оператора на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$

$$(\operatorname{Ran} A)^{\perp} = \operatorname{Ker} A^*.$$

Доказательство. Чтобы доказать (a), заметим, что оба условия эквивалентны тому, что $f=U^{-1}f$.

Перейдем к (b). Включение $\psi\in\operatorname{Ker} A^*$ равносильно тому, что $(\varphi, A^*\psi)=0$ для всех φ из $\mathscr{H}$. Но $\psi\in(\operatorname{Ran} A)^{\perp}$ означает, что $(A\varphi, \psi)=0$ для всех $\varphi\in\mathscr{H}$. Теперь (b) следует из определения сопряженного оператора. ∎

Доказательство статистической эргодической теоремы. Положим сначала $f=g-Ug$, т. е. $f\in\operatorname{Ran}(I-U)$. Тогда

$$\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U^n f\right\| = \left\|\frac{1}{N}(g-U^N g)\right\| \leqslant \frac{2\|g\|}{N}\longrightarrow 0$$

при $N\longrightarrow\infty$. Далее, $\varepsilon/3$-прием дает

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U^n f\longrightarrow 0$$

для любого $f\in\overline{\operatorname{Ran}(I-U)}$. Но в силу леммы

$$(\operatorname{Ran}(I-U))^{\perp} = \operatorname{Ker}(I-U^*) = \{\psi \mid U^*\psi=\psi\} = \{\psi \mid U\psi=\psi\}.$$

Следовательно, $Pf=0$ тогда и только тогда, когда $f\in\overline{\operatorname{Ran}(I-U)}$.

Допустим теперь, что $Pf=f$. Тогда ясно, что

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U^n f$$

сходится к $f=Pf$. Значит, предельное утверждение выполнено на $\overline{\mathrm{Ran}\,(I-U)}$ и на $\mathrm{Ker}\,(I-U^*)$, а следовательно, и на множестве $\overline{\mathrm{Ran}\,(I-U)}\oplus\mathrm{Ker}\,(I-U^*)$, которое совпадает со всем $\mathcal{H}$ в силу теоремы о проекции и утверждения (b) леммы. ∎

Какие же функции из $L^2(\Omega_E, d\mu_E)$ удовлетворяют условию $U_t f=f$ в непрерывном случае? Очевидно, что постоянные функции инвариантны.

Определение. Преобразование (поток) T_t называется **эргодическим**, если единственные функции из $L^2(\Omega_E, d\mu_E)$, которые удовлетворяют условию $f(T_t w)=f(w)$ почти всюду, суть постоянные функции.

Из непрерывного аналога статистической эргодической теоремы (задача 18) вытекает такое

Следствие. Пусть T_t эргодичен. Тогда для любого $f\in L^2(\Omega_E, d\mu_E)$

$$L^2\text{-}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(T_t w)\,dt=\int_{\Omega_E} f(y)\,d\mu_E(y). \tag{II.4}$$

Доказательство. В этом случае $\{\psi\,|\,U\psi=\psi\}$ одномерно. Следовательно, $P\psi$ есть константа C, причем

$$C=(1,\psi)=\int_{\Omega_E}\psi(w)\,d\mu_E(w).\ ∎$$

Заметим, что если выполнено (II.4), то $P\psi$ — константа, так что T_t должен быть эргодичным; таким образом, эргодичность есть необходимое и достаточное условие выполнения (II.4).

Иногда бывает полезно выразить свойство эргодичности в терминах меры.

Предложение. Поток T_t эргодичен тогда и только тогда, когда для всех измеримых множеств $F\subset\Omega_E$ из равенства $T_t^{-1}F=F$ при всех t следует, что $\mu_E(F)=0$ или $\mu_E(F)=1$.

Доказательство. Допустим, что T_t эргодичен и $T_t^{-1}F=F$ при всех t. Тогда $f=\chi_F$ — инвариантная функция и, значит, χ_F есть константа п. в., откуда следует, что $\mu(F)=0$ или $\mu(F)=1$.

Обратно: допустим теперь, что выполнено второе условие. Тогда $\{w\,|\,f(w)<a\}$ инвариантно относительно T_t, так что $f(w)<a$

п. в. или $f(w) \geqslant a$ п. в. Так как это верно для всех a, то $f(w)$ есть константа п. в. ∎

Условие, что из $T_t^{-1}F=F$ следует $\mu_E(F)=0$ или $\mu_E(F)=1$, называют иногда **метрической транзитивностью**.

Итак, что же мы доказали? Мы вывели условие на поток T_t, необходимое и достаточное для того, чтобы предел

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(T_t w)\,dt$$

был именно таким, как мы хотели, но не в смысле сходимсти при каждом w; вместо этого мы получили, что $\frac{1}{T}\int_0^T f(T_t w)\,dt$ сходится в смысле L^2 к постоянной функции

$$\int_{\Omega_E} f(w)\,d\mu(w).$$

Это и не удивительно, так как поточечная сходимость—чуждое L^2 понятие. Пользуясь методами гильбертова пространства, мы потеряли возможность доказать, что

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(T_t w)\,dt$$

сходится поточечно для каждого w при $T\to\infty$. На самом деле поточечный предел тоже существует, но это доказывается совсем иными методами. Мы сформулируем этот результат.

Теорема II.12 (индивидуальная эргодическая теорема, или эргодическая теорема Биркгофа). Пусть T—сохраняющее меру преобразование на пространстве с мерой $\langle\Omega, \mu\rangle$. Тогда для любого $f\in L^1(\Omega, d\mu)$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x)$$

существует поточечно п. в. и есть некоторая функция $f^\#\in L^1(\Omega, d\mu)$, удовлетворяющая условию $f^\#(Tx)=f^\#(x)$. Если $\mu(\Omega)<\infty$, то

$$\int_\Omega f^\#(x)\,d\mu(x)=\int_\Omega f(x)\,d\mu(x).$$

Далее, если μ эргодичиа и $\mu(\Omega)=1$, то

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_\Omega f(y)\,d\mu(y)$$

при почти всех x.

Эта теорема ближе к тому, что требуется для обосиования статистической механики, чем теорема фои Неймаиа, и модио говорить, что теорема фон Неймаиа для статистической механики ие годится. Нам кажется, что это преувеличеиие. Имей мы только теорему фон Неймана, мы бы и с нею прекрасио прожили. В типичных ситуациях начальные условия иельзя измерить точио, поэтому можно было бы связать начальные условия с мерами $f d\mu$, такими, что $\int f\,d\mu=1$, и в этом случае теоремы фои Неймаиа достаточно. Однако теорема Биркгофа, к счастью, выполняется, и, коиечио, удобиее пользоваться имеиио ею для обосиоваиия утверждения, что средиие по фазовому простраиству совпадают со средними по времени.

Наконец, остается вопрос, эргодичны ли на самом деле классические механические потоки иа поверхиостях постояниой эиергии. Об этом интересном, но трудиом вопросе мало что известно. Одиако, как показал иедавно Синай, газ из твердых шариков в ящике является эргодической системой.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ *II.1.* Хорошим справочииком по гильбертовым простраиствам может служить первая глава киити П. Халмоша: Paul Halmos, Introduction to Hilbert Space, Chelsea, Bronx, New York, 1957. Его книга: Гильбертово простраиство в задачах, «Мир», М., 1970, состоящая из задач с указаииями и решеииями, трудиа, ио очеиь полезиа читателю, уже приобретшему опыт. Стаидартный курс Ф. Рисса и Б. Секефальви-Надя, Лекции по функциоиальному анализу, ИЛ, М., 1954, содержит приложеиия к интегральным уравнеииям.

§ *II.2.* Лемма Рисса была доказаиа иезависимо Ф. Риссом (F. Riesz, Sur une espèce de géométrie analytiques des systèms de fonctions sommable, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **144** (1907), 1409—1411) и Фреше (M. Fréchet, Sur les ensembles des fonctions et les opérations linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **144** (1907), 1414—1416). Леммой Рисса можно воспользоваться для короткого доказательства существоваиия сопряжеииых операторов в случае гильбертова пространства. Общее определеиие сопряжеиия в смысле баиаховых простраиств даио в гл. VI.

§ *II.3.* Может показаться иемиого страиным, что $L^2[0, 1]$ сепарабельио, хотя фуикции приинмают зиачеиия в иесчетиом миожестве точек. Но эти зиачения ие произвольиы, так как фуикции измеримы — это уже сильиое ограиичение, а вдобавок мы отождествляем те фуикции, которые различаются лишь на миожестве иулевой меры.