Далее, если μ эргодичиа и $\mu(\Omega)=1$, то

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_{\Omega} f(y)\,d\mu(y)$$

при почти всех x.

Эта теорема ближе к тому, что требуется для обосиования статистической механики, чем теорема фои Неймаиа, и модио говорить, что теорема фон Неймаиа для статистической механики ие годится. Нам кажется, что это преувеличение. Имей мы только теорему фон Неймана, мы бы и с нею прекрасио прожили. В типичных ситуациях начальные условия иельзя измерить точио, поэтому можно было бы связать начальные условия с мерами $f d\mu$, такими, что $\int f d\mu=1$, и в этом случае теоремы фои Неймаиа достаточно. Однако теорема Биркгофа, к счастью, выполняется, и, коиечио, удобиее пользоваться имеино ею для обосиоваиия утверждения, что средиие по фазовому простраиству совпадают со средними по времени.

Наконец, остается вопрос, эргодичны ли на самом деле классические механические потоки иа поверхиостях постояииой эиергии. Об этом интересном, но трудиом вопросе мало что известно. Одиако, как показал иедавно Сииай, газ из твердых шариков в ящике является эргодической системой.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ *II.1.* Хорошим справочииком по гильбертовым простраиствам может служить первая глава киигн П. Халмоша: Paul Halmos, Introduction to Hilbert Space, Chelsea, Bronx, New York, 1957. Его книга: Гильбертово простраиство в задачах, «Мир», М., 1970, состоящая из задач с указаииями и решениями, трудиа, ио очеиь полезиа читателю, уже приобретшему опыт. Стаидартный курс Ф. Рисса и Б. Секефальви-Надя, Лекции по функциоиальному анализу, ИЛ, М., 1954, содержит приложеиия к интегральным уравнениям.

§ *II.2.* Лемма Рисса была доказаиа иезависимо Ф. Риссом (F. Riesz, Sur une espèce de géométrle analytiques des systèms de fonctions sommable, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **144** (1907), 1409—1411) и Фреше (M. Fréchet, Sur les ensembles des fonctions et les opérations linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **144** (1907), 1414—1416). Леммой Рисса можно воспользоваться для короткого доказательства существования сопряжеииых операторов в случае гильбертова пространства. Общее определеиие сопряжеиия в смысле баиаховых простраиств даио в гл. VI.

§ *II.3.* Может показаться иемиого страииым, что $L^2[0, 1]$ сепарабельио, хотя фуикции прииимают зиачеиия в иесчетиом множестве точек. Но эти значения ие произвольны, так как фуикции измеримы — это уже сильиое ограиичение, а вдобавок мы отождествляем те фуикции, которые различаются лишь на миожестве иулевой меры.

Изучающих функциональный анализ часто ставит в тупик следующий вопрос. Если все бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства одинаковы (изоморфны l_2), зачем вообще говорить о них? С какой стати специально заниматься $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$, если как гильбертово пространство оно изоморфно l_2? Ответ в том, что нас часто интересует не само пространство, но какие-то другие структуры, например некоторые ограниченные операторы на этом пространстве. Правда, при изоморфизме эти операторы переходят в ограниченные операторы на l_2, но может случиться, что их структуру легче изучать на $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$. Такая ситуация очень характерна для функционального анализа: мы стараемся подобрать такое представление рассматриваемых структур, с которым легче работать. В качестве совсем простого примера пусть читатель вспомнит теорему о главных осях (спектральную теорему) для $\mathbb{C}^n$: для данного самосопряженного преобразования можно выбрать ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$ так, чтобы матрица преобразования в этом базисе была диагональной. Это означает, что если мы выберем правильный изоморфный экземпляр $\mathbb{C}^n$ (замена базиса), то оператор станет особенно простым. Как читатель увидит, этот пример — лишь первая йота довольно длинной симфонии.

Первое доказательство сходимости рядов Фурье для широкого класса функций дал в 1829 г. Дирихле. Хорошее руководство и по классической теории и по современному подходу — книга И. Кацнельсона: Y. Katznelson, An Introduction to Harmonic Analysis, Wiley, New York, 1968. Недавно Карлсон доказал поразительный результат: ряды Фурье функций из $L^2[0, 2\pi]$ сходятся поточечно п. в. (On the Convergence and Growth of Partial Sums of Fourier Series, *Acta Math.*, **116** (1966), 135—157). Хант распространил этот результат на различные пространства L^p (R. Hunt, On the Convergence of Fourier Series, in «Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues» (D. Haimo, ed.), Southern Illinois Univ. Press, 1968, pp. 235—237).

§ II.4. Конечные тензорные произведения гильбертовых пространств первыми описали фон Нейман и Муррей (J. von Neumann, F. Murray, On Rings of Operators, *Ann. Math.* (2), **37** (1936), 116—229), хотя тензорные произведения конечномерных пространств были известны уже задолго до того. Современную трактовку тензорных произведений локально выпуклых пространств см. в книге: F. Trèves, Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels, Academic Press, New York, 1967. То тензорное произведение, которое мы определили, соответствует π-произведению Трева.

Определение пространств, которые мы называем пространствами Фока, восходит к оригинальной статье: V. Fock, Konfigurationsraum und Zweite Quantelung, *Z. Phys.*, **75** (1932), 622—647 (перепечатано в сборнике: В. А. Фок, Работы по квантовой теории поля, Издательство ЛГУ, Л., 1957, стр. 25). В гл. X пространство Фока будет использовано для построения свободного поля — полевой теории, удовлетворяющей аксиомам Вайтмана.

§ II.5. Изложение термодинамики с нестатистической точки зрения, т. е. как науки в основном эмпирической, см. в книге: A. B. Pippard, The Elements of Classical Thermodynamics, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1957.

Обсуждение различных точек зрения на нулевое начало термодинамики, не включающих эргодическую теорему, см. у Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, Статистическая физика, «Наука», М., 1964, гл. I, или в работе F. Strocchi, Microscopic and Macroscopic Quantities in Statistical Mechanics, *Il Nuovo Cimento*, **65B** (1970), 239—265.

Доказательство теоремы Лиувилля см. в книгах: Г. Голдстайн, Классическая механика, Гостехтеориздат, М., 1957, стр. 266—268, или R. Abraham, Foundations of Mechanics, Benjamin, New York, 1967, p. 108.

Идея использования методов гильбертовых пространств для изучения систем классической механики впервые выдвинута в работе: B. O. Koopman, Hamiltonian Systems and Transformations in Hilbert Spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci.* (USA), **17** (1931), 315—318.

Эргодическая теорема фон Неймана впервые доказана в работе: J. von Neumann, Proof of the Quasiergodic Hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci.* (USA), 18 (1932), 70—82. Приведенное доказательство принадлежит Ф. Риссу (F. Riesz, Sur la théorie ergodique, *Comm. Math. Helv.*, 17 (1945), 221—239).

Эргодическая теорема Биркгофа доказана в работе: G. D. Birkhoff, Proof of the Ergodic Theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci.* (USA), 17 (1931), 656—660. Ф. Рисс в цитированной работе предложил другое, более простое доказательство, основанное на «максимальной эргодической теореме» Винера (N. Wiener, The Ergodic Theorem, *Duke Math. J.*, 5 (1939), 1—18) и Иосиды и Какутани (K. Yoshida, S. Kakutani, Birkhoff's Ergodic Theorem and the Maximal Ergodic Theorem, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 15 (1939), 165—168). Дальнейшее упрощение доказательства максимальной эргодической теоремы см. в работе: A. M. Garsia, A Simple Proof of E. Hopf's Maximal Ergodic Theorem, *J. Math. Mech.*, 14 (1965), 381—382.

Прекрасное изложение математической стороны эргодической теории можно найти в книге П. Халмоша, Лекции по эргодической теории, ИЛ, М., 1959, а исторический обзор предмета—в статье: P. R. Halmos, Measurable Transformations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 (1948), 1015—1034.

Обсуждение статистической эргодической теоремы в рамках банахова пространства (включая L^p-статистическую эргодическую теорему при $1 < p < \infty$) см. в книге: E. Lorch, Spectral Theory, Oxford Univ. Press, London and New York, 1962, pp. 54—56.

Существуют глубокие связи между понятиями теории информации и эргодической теории; простое и хорошее изложение см. в книге: П. Биллингслей, Эргодическая теория и информация, «Мир», М., 1969.

Результат Синая об эргодичности газа из твердых шариков сформулирован в статье: Я. Синай, К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики, *ДАН СССР*, 153 (1963), 1261—1264. Набросок доказательства опубликован в статье: Ya. Sinai, Ergodicity of Boltzmann's Gas Model, in «Statistical Mechanics, Foundations and Applications» (T. Bak ed.), Benjamin, New York, 1967. В его доказательстве использованы важные идеи Крылова, Колмогорова и Аносова [1]).

Альтернативное к эргодичности свойство, приводящее к некоторым таким же следствиям, предложено Проссером (R. Prosser, Spectral Analysis of Classical Central Force Motion, *J. Math. Phys.*, 10 (1969), 2233—2239). Показано, что идеальный газ без соударений обладает этим свойством.

Для многих целей требуется, чтобы термодинамические системы обладали более сильным, чем эргодичность, свойством, которое называется перемешиванием; оно выражает «необратимость» термодинамических систем, и именно это более сильное свойство доказано Синаем. Мы кратко вернемся к перемешиванию в гл. VII. Обсуждение иерархии понятий, связанных с эргодичностью, см. в книгах: V. I. Arnold and A. Avez, Ergodic Problems of Classical Mechanics, Benjamin, New York, 1968; A. S. Wightman, Statistical Mechanics and Ergodic Theory: An Expository Lecture, in «Statistical Mechanics at the Turn of the Decade» (E. Cohen ed.), Ungar, New York, 1970.

Мы, конечно, слишком решительно отнесли целиком к микродинамике вопрос о том, сколь велико должно быть T, чтобы значение

$$T^{-1}\int_0^T f(w_t)\,dt$$

---

[1]) Позже Синай опубликовал полное доказательство для системы, состоящей из двух частиц: Я. Синай, Динамические системы с упругим отражением, *УМН* XXV (1970), 141—192.— *Прим. перев.*

было близко к предельному. Для общей эргодической системы время достижения предела должно быть характеристическим «временем возврата», т. е. характеристическим временем, необходимым для возвращения системы достаточно близко к начальному состоянию. Обычно для макроскопических систем это время астрономически велико. Поэтому важно решить вопрос: какие свойства механической системы делают «время релаксации», т. е. время установления равновесия, гораздо меньшим времени возврата. Хотя это, бесспорно, вопрос микродинамики, но ясно, что существует какой-то дополнительный механизм, благодаря которому это происходит, и очень хотелось бы этот механизм понять.

ЗАДАЧИ

†*1*. (a) Пусть V — пространство с внутренним произведением. Докажите, что это внутреннее произведение можно расширить на $\bar{V}$. Сначала покажите, что если x, $y \in \tilde{V}$, x_n, $y_n \in V$ и $x_n \to x$, $y_n \to y$, то (x_n, y_n) сходится. Определите внутреннее произведение формулой $(x, y) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n)$ и покажите, что оно не зависит от выбора сходящихся последовательностей. Наконец, покажите, что $(\cdot, \cdot)$ обладает необходимыми свойствами.

(b) Докажите утверждение (a), дважды применяя теорему об ограниченном линейном отображении.

**2*. (a) Простой функцией называется конечная линейная комбинация характеристических функций непересекающихся измеримых множеств. Покажите, что простые функции плотны в $L^2[a, b]$.

(b) Покажите, что любая простая функция на $[a, b]$ может быть сколь угодно точно (в смысле L^2) аппроксимирована ступенчатыми.

(c) Покажите, что любая ступенчатая функция может быть аппроксимирована сколь угодно точно (в смысле L^2) непрерывной функцией, и заключите из этого, что $C[a, b]$ плотно в $L^2[a, b]$ по норме в L^2.

3. Докажите, что если μ_1 и μ_2 — взаимно сингулярные меры Бореля на $\mathbb{R}$ и $\mu = \mu_1 + \mu_2$, то $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ естественно изоморфно $L^2(\mathbb{R}, d\mu_1) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_2)$. [*Указание*: пусть A — множество, для которого $\mu_1(A) = 0$ и $\mu_2(\mathbb{R}\setminus A) = 0$; замените f на $\langle (1-\chi_A) f, \chi_A f\rangle$.]

4. (a) Докажите, что внутреннее произведение можно выразить через норму с помощью **поляризационного тождества**

$$(x, y) = \frac{1}{4}\{(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) - i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)\}.$$

*(b) Докажите, что нормированное линейное пространство есть пространство с внутренним произведением тогда и только тогда, когда норма удовлетворяет тождеству параллелограмма.

5. Пусть V — пространство с внутренним произведением и $\{x_n\}_{n=1}^N$ — ортонормированное множество. Докажите, что

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\|$$

достигает минимума при $c_n = (x_n, x)$.

†*6*. Пусть $\mathscr{M}$ — любое линейное подмножество гильбертова пространства $\mathscr{H}$. Докажите, что $\mathscr{M}^\perp$ есть замкнутое линейное подпространство и $\bar{\mathscr{M}} = (\mathscr{M}^\perp)^\perp$.