было близко к предельному. Для общей эргодической системы время достижения предела должно быть характеристическим «временем возврата», т. е. характеристическим временем, необходимым для возвращения системы достаточно близко к начальному состоянию. Обычно для макроскопических систем это время астрономически велико. Поэтому важно решить вопрос: какие свойства механической системы делают «время релаксации», т. е. время установления равновесия, гораздо меньшим времени возврата. Хотя это, бесспорно, вопрос микродинамики, но ясно, что существует какой-то дополнительный механизм, благодаря которому это происходит, и очень хотелось бы этот механизм понять.

ЗАДАЧИ

†*1*. (a) Пусть V — пространство с внутренним произведением. Докажите, что это внутреннее произведение можно расширить на $\bar{V}$. Сначала покажите, что если x, $y \in \tilde{V}$, x_n, $y_n \in V$ и $x_n \to x$, $y_n \to y$, то (x_n, y_n) сходится. Определите внутреннее произведение формулой $(x, y) = \lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n)$ и покажите, что оно не зависит от выбора сходящихся последовательностей. Наконец, покажите, что $(\cdot, \cdot)$ обладает необходимыми свойствами.

(b) Докажите утверждение (a), дважды применяя теорему об ограниченном линейном отображении.

**2*. (a) Простой функцией называется конечная линейная комбинация характеристических функций непересекающихся измеримых множеств. Покажите, что простые функции плотны в $L^2[a, b]$.

(b) Покажите, что любая простая функция на $[a, b]$ может быть сколь угодно точно (в смысле L^2) аппроксимирована ступенчатыми.

(c) Покажите, что любая ступенчатая функция может быть аппроксимирована сколь угодно точно (в смысле L^2) непрерывной функцией, и заключите из этого, что $C[a, b]$ плотно в $L^2[a, b]$ по норме в L^2.

3. Докажите, что если μ_1 и μ_2 — взаимно сингулярные меры Бореля на $\mathbb{R}$ и $\mu = \mu_1 + \mu_2$, то $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ естественно изоморфно $L^2(\mathbb{R}, d\mu_1) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_2)$. [*Указание*: пусть A — множество, для которого $\mu_1(A) = 0$ и $\mu_2(\mathbb{R} \setminus A) = 0$; замените f на $\langle (1-\chi_A) f, \chi_A f \rangle$.]

4. (a) Докажите, что внутреннее произведение можно выразить через норму с помощью **поляризационного тождества**

$$(x, y) = \frac{1}{4}\{(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) - i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)\}.$$

*(b) Докажите, что нормированное линейное пространство есть пространство с внутренним произведением тогда и только тогда, когда норма удовлетворяет тождеству параллелограмма.

5. Пусть V — пространство с внутренним произведением и $\{x_n\}_{n=1}^N$ — ортонормированное множество. Докажите, что

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\|$$

достигает минимума при $c_n = (x_n, x)$.

†*6*. Пусть $\mathcal{M}$ — любое линейное подмножество гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Докажите, что $\mathcal{M}^\perp$ есть замкнутое линейное подпространство и $\bar{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}^\perp)^\perp$.

†7. Докажите утверждения о единственности в теореме II.3 и предшествующей лемме.

†8. Завершите доказательство следствия леммы Рисса.

9. Пусть $\mathcal{M}$ — подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Пусть f: $\mathcal{M} \to \mathbf{C}$ — линейный функционал на $\mathcal{M}$ с верхней гранью C. Докажите, что существует единственное расширение f до непрерывного линейного функционала на $\mathcal{H}$ с той же гранью C. (Заметим, что часть этого утверждения, относящаяся к существованию, есть в точности теорема Хана — Банаха для гильбертовых пространств, см. § III.3.)

10. Примените процедуру Грама — Шмидта к функциям $1, x, x^2, x^3$ в интервале $[-1, 1]$ с внутренним произведением L^2 и получите таким образом первые четыре полинома Лежандра (с точностью до постоянных множителей).

11. Докажите, что $L^2(\mathbf{R})$ сепарабельно. [*Указание*: см. задачу 2.]

†12. (Пример 6 § II.1.) Говорят, что векторнозначная функция f из пространства с мерой $\langle X, \mu\rangle$ в сепарабельное гильбертово пространство $\mathcal{H}'$ измерима, если $(y, f(x))_{\mathcal{H}'}$ измерима для всех $y \in \mathcal{H}'$.

(a) Покажите, что если $f(x)$ и $g(x)$ — измеримые векторнозначные функции, то $\|f(x)\|^2_{\mathcal{H}'}$ и $(f(x), g(x))_{\mathcal{H}'}$ измеримы.

(b) Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис в $\mathcal{H}'$. Докажите, что если $g \in L^2(X, d\mu; \mathcal{H}')$, то

$$\sum_{k=1}^{N} (\varphi_k, g(x))_{\mathcal{H}'} \varphi_k \longrightarrow g,$$

и если $f \in L^2(X, d\mu; \mathcal{H}')$, то

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X (f(x), \varphi_k)_{\mathcal{H}'} (\varphi_k, g(x))_{\mathcal{H}'} \, d\mu(x).$$

(c) Предположите, что $L^2(X, d\mu)$ сепарабельно, и докажите, что $L^2(X, d\mu; \mathcal{H}')$ сепарабельно.

13. Пользуясь прямыми суммами, постройте несепарабельное гильбертово пространство и несчетный ортонормированный базис.

*14. В этой задаче требуется показать, что ряд Фурье непрерывной функции поточечно суммируем к f по Чезаро. Рассмотрим $[0, 2\pi]$ как группу со сложением mod 2π и запишем $\int_0^{2\pi}$ как $\oint$. Пусть $f(\theta) \in L^2[0, 2\pi]$ и $c_n = (e^{in\theta}/\sqrt{2\pi}, f)$.

(a) Пусть $S_N f = \sum_{-N}^{N} c_n e^{in\theta}/\sqrt{2\pi}$. Докажите, что

$$(S_N f)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \oint f(\theta + x) \frac{\sin(N + 1/2)x}{\sin(x/2)} dx.$$

(b) Пусть $(\Sigma_N f)(\theta) = \frac{1}{N+1} \sum_{0}^{N} (S_n f)(\theta)$ (сумма Чезаро). Докажите, что

$$(\Sigma_N f)(\theta) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \oint f(x + \theta) \frac{\sin^2[(N+1)/2]x}{\sin^2(x/2)} dx.$$

(c) Пусть

$$K_N(x)=\frac{\sin^2[(N+1)/2]\,x}{2\pi\,(N+1)\sin(x/2)}.$$

Докажите, что $K_N(x)\longrightarrow 0$ равномерно в $[\delta, 2\pi-\delta]$ для любого $\delta>0$.

(d) Докажите, что $(\Sigma_N f)(\theta_0)\longrightarrow f(\theta_0)$, если f ограничена и непрерывна в θ_0.

(e) Докажите, что если f непрерывна и периодична, то $(\Sigma_N f)(\theta)\longrightarrow f(\theta)$ равномерно по θ. [*Указание*: вспомните, что из непрерывности f на $[0, 2\pi]$ следует ее равномерная непрерывность.]

(f) Покажите, что $\|f-S_N f\|_2\leqslant\|f-\Sigma_N f\|_2$, и заключите отсюда, что $S_N f\xrightarrow{L_2} f$, если f непрерывна.

†*15*. Предположим, что $f\in C_p^1[0, 2\pi]$ и $c_n=(e^{inx}/\sqrt{2\pi}, f)$, $b_n=(e^{inx}/\sqrt{2\pi}, f'(x))$.

(a) Докажите, что $\sum|b_n|^2<\infty$, и заключите отсюда, что $\sum n^2|c_n|^2<\infty$.

(b) Докажите, что $\sum|c_n|<\infty$.

(c) Докажите, что $\sum\limits_{-M}^{M}c_n e^{inx}/\sqrt{2\pi}$ равномерно сходится при $M\longrightarrow\infty$.

(d) Воспользуйтесь 14(f) для вывода, что $\sum\limits_{-M}^{M}c_n e^{inx}/\sqrt{2\pi}$ равномерно сходится к f.

16. Докажите, что единичный шар в бесконечномерном гильбертовом пространстве содержит бесконечно много *неперекрывающихся* трансляций шара радиусом $\sqrt{2}/4$. Сделайте заключение, что не может быть нетривиальной трансляционно-инвариантной меры в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

17. Докажите теорему Пуанкаре о возвращении. Дано сохраняющее меру отображение T на множестве Ω меры $\mu(\Omega)<\infty$. Тогда при любом измеримом множестве $E\subset\Omega$ бесконечно часто $T^n x\in E$ для почти всех $x\in E$. Этот результат утверждает, что почти каждое состояние в процессе эволюции бесконечно часто возвращается произвольно близко к начальному состоянию (это показывает, что флуктуации не прекращаются). (*Указание*. Пусть $F=\{x\,|\,T^n x\notin E$ при любых $n>0\}$. Покажите, что $\{T^{-m}F\}$ не пересекаются и что тем самым F имеет меру нуль.)

18. Пусть T_t—однопараметрическая группа сохраняющих меру преобразований пространства с мерой $\langle\Omega, \mu\rangle$. Примените дискретную статистическую эргодическую теорему к $\int_0^1 f(T_t w)\,dt$ и докажите статистическую эргодическую теорему для $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(T_t w)\,dt$.

19. Пусть V—оператор на гильбертовом пространстве, удовлетворяющий неравенству $\|V^n\|\leqslant C$ при всех n. Докажите, что $\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}V^n f\longrightarrow Pf$ для всех $f\in\mathcal{H}$, где P—проектор (необязательно ортогональный) на $\{f\,|\,Vf=f\}$.

20. Рассмотрите единичную окружность $\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|=1\}$ с мерой Лебега. Пусть $T(z)=e^{2\pi i\theta}z$. Покажите, что T эргодично тогда и только тогда, когда θ иррационален.

21. Пусть Ω — компактное метрическое пространство с метрикой ρ и некоторой мерой μ. Пусть T — сохраняющее меру эргодическое преобразование с дополнительным свойством $\rho(Tx, Ty) = \rho(x, y)$. (Например, отображение T задачи 20 с иррациональным θ.) Покажите, что если f — непрерывная функция на Ω, то $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n w)$ *равномерно* сходится к $\int_\Omega f\,d\mu$. [*Указание.* Докажите, что семейство

$$(M_N f)(w) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n w)$$

равномерно равностепенно непрерывно, а потом воспользуйтесь статистической эргодической теоремой и теоремой Асколи.]

**22.* Пусть $\{\eta_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — множество векторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, таких, что $a_{nm} = |(\eta_n, \eta_m)|$ есть матрица (в естественном базисе) оператора A на $l_2(-\infty, \infty)$. Докажите, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |(f, \eta_n)|^2 \leq \|A\| \, \|f\|^2$$

для любого $f \in \mathscr{H}$.

23. Пусть S_n — оператор, определенный в примере 2 § 4.
(a) Докажите, что S_n не зависит от базиса $\{\varphi_k\}$.
(b) Докажите, что $S_n^2 = S_n$ и $S_n = S_n^*$. (*Указание*: покажите, что $\sigma^* = \sigma^{-1}$.)
(c) Проделайте (a) и (b) для A_n.

**24.* Пусть $\langle M, \mathscr{R}, \mu\rangle$ — пространство с σ-конечной мерой. Пусть $\mathscr{R}_F = \{X \in \mathscr{R} \mid \mu(X) < \infty\}$. Будем называть $X, Y \in \mathscr{R}_F$ эквивалентными тогда и только тогда, когда $\mu(X \triangle Y) = 0$, где $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. Пусть $\hat{\mathscr{R}}_F$ — семейство классов эквивалентности $\mathscr{R}_F$ по этому отношению.
(a) Докажите, что $\mu(X \triangle Y)$ зависит только от классов эквивалентности X и Y в $\hat{\mathscr{R}}_F$.
(b) Докажите, что $\hat{\mathscr{R}}_F$ с функцией $\rho(X, Y) = \mu(X \triangle Y)$ есть метрическое пространство.
(c) Докажите, что $L^2(M, d\mu)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда $\hat{\mathscr{R}}_F$ с метрикой ρ — сепарабельное метрическое пространство.

**25.* Найдите конечное пространство с мерой (т. е. такое $\langle M, \mathscr{R}, \mu\rangle$, что $\mu(M) < \infty$), чтобы $L^2(M, d\mu)$ было несепарабельным. [*Указание.* Возьмите несчетное декартово произведение множеств вида $[0,1]$.]

26. Докажите, что утверждение (c) теоремы II.10 следует из утверждений (a) и (b).

27. Докажите теорему о проекции, пользуясь существованием ортонормированных базисов.