III. БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Reductio ad absurdum — острейшее оружие математика. Это гамбит гораздо более тонкий, чем шахматный: шахматист может пожертвовать пешкой или даже фигурой, но математик предлагает в жертву всю партию.

Г. Х. ХАРДИ

III.1. Определения и примеры

В § I.2 мы определили нормированное линейное пространство. Поскольку нормированные линейные пространства суть пространства метрические, они могут обладать свойством полноты.

Определение. Полное нормированное линейное пространство называется **банаховым пространством.**

Банаховы пространства обладают многими свойствами $\mathbb{R}^n$: это векторные пространства, норма в них определяет понятие расстояния и всякая последовательность Коши имеет предел. Вообще говоря, норма не порождается внутренним произведением (см. задачу 4 гл. II), поэтому банаховы пространства не являются непременно гильбертовыми и не обладают многими хорошими геометрическими свойствами последних. Чтобы познакомить читателя с типами банаховых пространств, которые чаще всего встречаются, обсудим подробно несколько примеров.

Пример 1 ($L^\infty(\mathbb{R})$ и его подпространства). Пусть $L^\infty(\mathbb{R})$ — множество (классов эквивалентности) комплекснозначных измеримых функций на $\mathbb{R}$, таких, что $|f(x)| \leqslant M$ почти всюду по мере Лебега при некотором $M < \infty$ ($f \sim g$ означает $f(x) = g(x)$ почти всюду). Пусть $\|f\|_\infty$ — наименьшее такое M. Легко показать (задача 1), что $L^\infty(\mathbb{R})$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_\infty$. Ограниченные непрерывные функции составляют подпространство $C(\mathbb{R})$ в $L^\infty(\mathbb{R})$, и сужение нормы $\|\cdot\|_\infty$ на $C(\mathbb{R})$ есть обычная sup-норма, относительно которой $C(\mathbb{R})$ полно (поскольку равномерный предел непрерывных функций непрерывен). Таким образом, $C(\mathbb{R})$ — замкнутое подпространство в $L^\infty(\mathbb{R})$.

Рассмотрим множество $\varkappa(\mathbb{R})$ непрерывных функций с компактным носителем, т. е. таких непрерывных функций, которые равны нулю всюду вне некоторого замкнутого интервала. Это нормированное линейное пространство с нормой $\|\cdot\|_\infty$, но не полное. Пополнение $\varkappa(\mathbb{R})$ не совпадает со всем $C(\mathbb{R})$; например, если функция f всюду равна единице, ее нельзя аппроксимировать никакой функцией из $\varkappa(\mathbb{R})$, поскольку $\|f-g\|_\infty \geqslant 1$ для всех $g \in \varkappa(\mathbb{R})$. Пополнение $\varkappa(\mathbb{R})$ есть в точности $C_\infty(\mathbb{R})$ — множество непрерывных функций, стремящихся к нулю на $\pm\infty$ (задача 5). Некоторые из самых мощных теорем функционального анализа (теоремы Рисса—Маркова, Стоуна—Вейерштрасса) — это обобщения свойств $C(\mathbb{R})$ (см. § IV.3 и IV.4).

Пример 2 (L^p-пространства). Пусть $\langle X, \mu\rangle$ — пространство с мерой и $p \geqslant 1$. Обозначим через $L^p(X, d\mu)$ множество классов эквивалентности измеримых функций, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} < \infty.$$

Две функции эквивалентны, если они отличаются лишь на множестве меры нуль. В следующей теореме собраны многие из стандартных свойств пространств L^p.

Теорема III.1. Пусть $1 \leqslant p < \infty$; тогда:

(a) Если $f, g \in L^p(X, d\mu)$, то

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

(неравенство Минковского).

(b) $L^p(X, d\mu)$ полно (Рисс—Фишер).

(c) Пусть p, q и r — положительные числа, удовлетворяющие условиям $p, q, r \geqslant 1$ и $p^{-1}+q^{-1}=r^{-1}$. Предположим, что $f \in L^p(X, d\mu)$, $g \in L^q(X, d\mu)$; тогда $fg \in L^r(X, d\mu)$ и

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

(неравенство Гёльдера).

Доказательства этих неравенств не содержат ничего особенно поучительного, так что мы их опустим (ссылки см. в Замечаниях). Неравенство Минковского говорит о том, что $L^p(X, d\mu)$ — векторное пространство и что $\|\cdot\|_p$ удовлетворяет неравенству треугольиика. В сочетании с (b) это показывает, что $L^p(X, d\mu)$ есть банахово пространство. Мы доказали (b) в случае, когда $p=1$, $X=\mathbb{R}$ и μ — мера Лебега; доказательство общего случая совершенно такое же.

Пример 3 (пространства последовательностей). Существует хороший класс пространств, который легко описать и которым мы будем часто пользоваться для иллюстрации различных понятий. В следующих ниже определениях

$$a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

всегда обозначает последовательность комплексных чисел:

$$l_\infty = \left\{a \,\Big|\, \|a\|_\infty \equiv \sup_n |a_n| < \infty\right\};$$

$$c_0 = \left\{a \,\Big|\, \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right\};$$

$$l_p = \left\{a \,\Big|\, |a|_p \equiv \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} < \infty\right\},$$

$$s = \left\{a \,\Big|\, \lim_{n\to\infty} n^p a_n = 0 \text{ для всех положительных целых } p\right\};$$

$$f = \{a \mid a_n = 0 \text{ для всех, кроме конечного числа } n\}.$$

Очевидно, что $f \subset s \subset l_p \subset c_0 \subset l_\infty$.

Пространства l_∞ и c_0 суть банаховы пространства с нормой $\|\cdot\|_\infty$; l_p—банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_p$ (заметим, что это следует из примера 2, так как $l_p = L^p(\mathbb{R}, d\mu)$, где μ—мера с единичной массой в положительных целых точках и нулевой массой во всех других точках). Как мы увидим ниже, s—пространство Фреше (§ V.2). Одна из причин, почему удобно иметь дело с этими пространствами, та, что f плотно в l_p (по норме $\|\cdot\|_p$, $p < \infty$) и плотно в c_0 (по норме $\|\cdot\|_\infty$). Кроме того, множество элементов f, состоящих лишь из рациональных чисел, плотно в l_p и в c_0. Поскольку это множество счетно, l_p и c_0 сепарабельны. Пространство l_∞ не сепарабельно (задача 2).

Пример 4 (ограниченные операторы). В § I.3 мы определили понятие ограниченного линейного преобразования или ограниченного оператора из одного нормированного линейного пространства X в другое Y; будем обозначать множество всех ограниченных линейных операторов из X в Y через $\mathscr{L}(X, Y)$. Можно ввести норму в $\mathscr{L}$, положив

$$\|A\| = \sup_{x\in X,\ x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Эту норму часто называют **операторной нормой**.

Теорема III.2. Если Y полно, то $\mathscr{L}(X, Y)$—банахово пространство.

Доказательство. Поскольку любая линейная комбинация ограниченных операторов есть ограниченный оператор, $\mathscr{L}(X, Y)$—векторное пространство. Легко видеть, что $\|\cdot\|$ есть норма; так, например, неравенство треугольника доказывается простым вычислением:

$$\|A+B\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leqslant \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|+\|Bx\|}{\|x\|} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| + \|B\|.$$

Покажем, что $\mathscr{L}(X, Y)$ полно. Для этого надо доказать, что если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность Коши по операторной норме, то существует ограниченный линейный оператор A, такой, что $\|A_n - A\| \to 0$. Построим A следующим образом. Для любого $x \in X$ последовательность $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность Коши в Y. Так как Y полно, $A_n x$ сходится к некоторому элементу $y \in Y$. Положим $Ax = y$. Легко проверить, что A — линейный оператор. Из неравенства треугольника вытекает, что

$$|\|A_n\| - \|A_m\|| \leqslant \|A_n - A_m\|,$$

и, значит, $\{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность Коши вещественных чисел, сходящаяся к некоторому вещественному числу C. Итак,

$$\|Ax\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\|_Y \leqslant \lim_{n\to\infty} \|A_n\| \|x\|_X = C \|x\|_X,$$

и A — ограниченный линейный оператор. Надо еще показать, что $A_n \to A$ по операторной норме. Так как $\|(A - A_n)x\| = \lim_{m\to\infty} \|(A_m - A_n)x\|$, то

$$\frac{\|(A - A_n)x\|}{\|x\|} \leqslant \lim_{m\to\infty} \|A_m - A_n\|,$$

откуда следует, что

$$\|A - A_n\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(A - A_n)x\|}{\|x\|} \leqslant \lim_{m\to\infty} \|A_m - A_n\|,$$

где правая часть произвольно мала при достаточно больших n. Неравенство треугольника показывает, что норма A на самом деле равна C. ∎

Важно иметь критерии для определения полноты нормированных линейных пространств. Такой критерий дает следующая теорема (доказательство которой составляет задачу 3). Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов нормированного линейного пространства X называется **абсолютно суммируемой**, если $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Она называется **суммируемой**, если $\sum_{n=1}^{N} x_n$ сходится к $x \in X$, когда $N \to \infty$.

Теорема III.3. Нормированное линейное пространство полно тогда и только тогда, когда каждая абсолютно суммируемая последовательность суммируема.

Типичное приложение этой теоремы — конструкция факторпространств в § III.4. Заключим этот вводный раздел некоторыми определениями.

Определение. Ограниченный линейный оператор из нормированного линейного пространства X в нормированное линейное пространство Y называется **изоморфизмом**, если он является непрерывной биекцией с непрерывным обратным. Если он к тому же сохраняет норму, то его называют **изометрией**.

Например, в § II.3 мы доказали, что все сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства изометричны l_2. Два изометричных банаховых пространства могут рассматриваться как одно и то же, пока они нас интересуют лишь как банаховы пространства.

На нормированном линейном пространстве часто бывают заданы две различные нормы.

Определение. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на нормированном линейном пространстве X называются **эквивалентными**, если существуют положительные константы C и C', такие, что для всех $x \in X$

$$C\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C'\|x\|_1.$$

Например, эквивалентны следующие три нормы в $\mathbb{R}^2$:

$$\|\langle x, y\rangle\|_2 = \sqrt{|x|^2+|y|^2},$$
$$\|\langle x, y\rangle\|_1 = |x|+|y|,$$
$$\|\langle x, y\rangle\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}.$$

На самом деле все нормы в $\mathbb{R}^2$ эквивалентны (см. задачу 4). Обычная ситуация, с которой мы будем встречаться,—это неполное нормированное линейное пространство с двумя нормами. Пополнения этого пространства по каждой из двух норм изоморфны тогда и только тогда, когда нормы эквивалентны. В качестве примера можно рассмотреть пространства последовательностей из примера 3. Пополнение f по норме $\|\cdot\|_\infty$ есть c_0, а его пополнение по норме $\|\cdot\|_p$ есть l_p. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на нормированном линейном пространстве X эквивалентны тогда и только тогда, когда тождественное отображение есть изоморфизм между $\langle X, \|\cdot\|_1\rangle$ и $\langle X, \|\cdot\|_2\rangle$.

III.2. Сопряженные и вторые сопряженные пространства

Выше было доказано, что множество ограниченных линейных операторов из одного банахова пространства X в другое Y само является банаховым пространством. В случае когда Y составлено из комплексных чисел, это пространство $\mathscr{L}(X, \mathbb{C})$ обозначается X^* и называется **сопряженным** к X. Элементы X^* называются ограниченными линейными функционалами на X. В этой главе, говоря о сходимости в X^*, мы всегда имеем в виду сходимость по норме,