пространство Y называется **изоморфизмом**, если он является непрерывной биекцией с непрерывным обратным. Если он к тому же сохраняет норму, то его называют **изометрией**.

Например, в § II.3 мы доказали, что все сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства изометричны l_2. Два изометричных банаховых пространства могут рассматриваться как одно и то же, пока они нас интересуют лишь как банаховы пространства.

На нормированном линейном пространстве часто бывают заданы две различные нормы.

Определение. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на нормированном линейном пространстве X называются **эквивалентными**, если существуют положительные константы C и C', такие, что для всех $x \in X$

$$C\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C'\|x\|_1.$$

Например, эквивалентны следующие три нормы в $\mathbb{R}^2$:

$$\|\langle x, y\rangle\|_2 = \sqrt{|x|^2+|y|^2},$$
$$\|\langle x, y\rangle\|_1 = |x|+|y|,$$
$$\|\langle x, y\rangle\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}.$$

На самом деле все нормы в $\mathbb{R}^2$ эквивалентны (см. задачу 4). Обычная ситуация, с которой мы будем встречаться,—это неполное нормированное линейное пространство с двумя нормами. Пополнения этого пространства по каждой из двух норм изоморфны тогда и только тогда, когда нормы эквивалентны. В качестве примера можно рассмотреть пространства последовательностей из примера 3. Пополнение f по норме $\|\cdot\|_\infty$ есть c_0, а его пополнение по норме $\|\cdot\|_p$ есть l_p. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на нормированном линейном пространстве X эквивалентны тогда и только тогда, когда тождественное отображение есть изоморфизм между $\langle X, \|\cdot\|_1\rangle$ и $\langle X, \|\cdot\|_2\rangle$.

III.2. Сопряженные и вторые сопряженные пространства

Выше было доказано, что множество ограниченных линейных операторов из одного банахова пространства X в другое Y само является банаховым пространством. В случае когда Y составлено из комплексных чисел, это пространство $\mathscr{L}(X, \mathbb{C})$ обозначается X^* и называется **сопряженным** к X. Элементы X^* называются ограниченными линейными функционалами на X. В этой главе, говоря о сходимости в X^*, мы всегда имеем в виду сходимость по норме, указанной в теореме III.2. Если $\lambda \in X^*$, то

$$\|\lambda\| = \sup_{x \in X,\, \|x\| \leqslant 1} |\lambda(x)|.$$

В § IV.5 мы обсудим другое понятие сходимости в X^*.

Сопряженные пространства играют важную роль в математической физике. Во многих моделях физических систем, будь то в квантовой механике, статистической физике или квантовой теории поля, допустимым состояниям системы можно сопоставить линейные функционалы на подходящих банаховых пространствах. Кроме того, линейные функционалы играют важную роль в современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. По этим причинам, а также потому, что они интересны и сами по себе, сопряженные пространства хорошо изучены. Два главных направления исследования таковы: определение сопряженных к отдельным банаховым пространствам или поиски общих теорем, связывающих свойства банаховых пространств со свойствами их сопряженных. В этом разделе мы изучим несколько примеров, представляющих специальный интерес, и докажем одну общую теорему. Пример другой общей теоремы — теорема III.7 ниже.

Пример 1 (пространства L^p). Допустим, что $1 < p < \infty$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Если $f \in L^p(\mathbb{R})$ и $g \in L^q(\mathbb{R})$, то, согласно неравенству Гёльдера, fg лежит в $L^1(\mathbb{R})$. Значит,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)}\, f(x)\, dx$$

имеет смысл. Фиксируем $g \in L^q(\mathbb{R})$ и положим

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)}\, f(x)\, dx$$

для всякого $f \in L^p(\mathbb{R})$. Неравенство Гёльдера показывает, что $G(\cdot)$ — ограниченный линейный функционал на $L^p(\mathbb{R})$ с нормой, меньшей или равной $\|g\|_q$; фактически эта норма равна $\|g\|_q$. Справедливо также обратное утверждение. Именно, всякий ограниченный линейный функционал на L^p имеет вид $G(\cdot)$ с некоторой $g \in L^q$. Далее, различные функции в L^q порождают различные функционалы на L^p. Значит, отображение, которое каждому $g \in L^q$ ставит в соответствие свой линейный функционал $G(\cdot)$ на $L^p(\mathbb{R})$, есть (сопряженно-линейный) изометрический изоморфизм между L^q и $(L^p)^*$. В этом смысле L^q есть сопряженное к L^p. А так как p и q входят в выражение $p^{-1} + q^{-1} = 1$ симметрично, то $L^p = (L^q)^* = ((L^p)^*)^*$, т. е. сопряженное к пространству, сопряженному к L^p, есть опять L^p.

Случай $p=1$ особый. Сопряженное к $L^1(\mathbb{R})$ есть $L^\infty(\mathbb{R})$, причем элементы $L^\infty(\mathbb{R})$ действуют на функции из $L^1(\mathbb{R})$ естественным образом, задаваемым приведенным выше интегралом. Однако сопряженное к $L^\infty(\mathbb{R})$ не есть $L^1(\mathbb{R})$, но гораздо более широкое пространство (см. задачи 7 и 8). На самом деле, как мы далее докажем (гл. XVI), $L^1(\mathbb{R})$ не является сопряженным ни к какому банахову пространству. Утверждения о сопряженности этого примера выполнены и для $L^p(X, d\mu)$, где $\langle X, \mu\rangle$ — общее пространство с мерой, за тем, однако, исключением, что $L^1(X)$ может быть сопряжено к $L^\infty(X)$ лишь тогда, когда $\langle X, \mu\rangle$ тривиально мало.

Пример 2 (гильбертовы пространства). Если положить $p=2$ в примере 1, то $q=2$, и мы получим, что $L^2(\mathbb{R})=L^2(\mathbb{R})^*$, т. е. $L^2(\mathbb{R})$ — сопряженное к самому себе. Фактически мы уже показали (лемма Рисса) в § II.2, что это верно для всех гильбертовых пространств. Еще раз предупредим читателя, что отображение, отождествляющее $\mathcal{H}$ с $\mathcal{H}^*$, сопряженно-линейно. Если $g\in\mathcal{H}$, то линейный функционал, отвечающий g, есть $G(f)=(g, f)$.

Пример 3 ($l_\infty=l_1^*$, $l_1=c_0^*$). Допустим, что $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty\in l_1$. Тогда для всякого $\{a_k\}_{k=1}^\infty\in c_0$ сумма

$$\Lambda(\{a_k\}_{k=1}^\infty)=\sum_{k=1}^\infty \lambda_k a_k$$

сходится, и $\Lambda(\cdot)$ есть непрерывный линейный функционал на c_0 с нормой, равной $\sum\limits_{k=1}^\infty|\lambda_k|$. Убедимся, что все непрерывные линейные функционалы на c_0 порождаются таким путем. Пусть $\lambda\in c_0^*$, и пусть e^k — такая последовательность в c_0, у которой все члены, кроме единицы на k-м месте, равны нулю. Положим $\lambda_k=\lambda(e^k)$ и $f^l=\sum\limits_{k=1}^l(|\lambda_k|/\lambda_k)e^k$. Если какое-либо λ_k — нуль, этот член в сумме просто опускается. Тогда при каждом l имеем $f^l\in c_0$ и $\|f^l\|_{c_0}=1$. Так как

$$\lambda(f^l)=\sum_{k=1}^l|\lambda_k| \quad \text{и} \quad |\lambda(f^l)|\leqslant\|f^l\|_{c_0}\|\lambda\|_{c_0^*},$$

то

$$\sum_{k=1}^l|\lambda_k|\leqslant\|\lambda\|_{c_0^*}.$$

Но это справедливо для всех l, поэтому $\sum\limits_{k=1}^\infty|\lambda_k|<\infty$ и

$$\Lambda(\{a_k\}_{k=1}^\infty)=\sum_{k=1}^\infty\lambda_k a_k$$

— корректно определенный линейный функционал на c_0. Однако $\lambda(\cdot)$ и $\Lambda(\cdot)$ совпадают на конечных линейных комбинациях e^k. Так как эти конечные линейные комбинации плотны в c_0, мы заключаем, что $\lambda=\Lambda$. Значит, всякий функционал из c_0^* порождается некоторой последовательностью из l_1, и читатель может самостоятельно убедиться в том, что нормы в l_1 и c_0^* совпадают. Следовательно, $l_1=c_0^*$. Аналогичное доказательство позволяет убедиться в том, что $l_\infty=l_1^*$.

Так как сопряженное X^* к банахову пространству X само есть банахово пространство (теорема III.2), оно тоже имеет сопряженное к нему пространство, обозначаемое X^{**}. Это X^{**} называется **вторым сопряженным**, или **бисопряженным**, или **дважды сопряженным** к пространству X. В примере 3 l_1 — первое сопряженное к c_0, а l_∞ — второе сопряженное. A priori не очевидно, что X^* всегда ненулевое, и если $X^*=\{0\}$, то $X^{**}=\{0\}$ тоже. Однако такого не происходит; сопряженные пространства всегда содержат много линейных функционалов. Мы докажем это в следующем разделе. Воспользовавшись одним доказанным там же следствием, мы покажем, что X можно естественным образом рассматривать как подпространство в X^{**}.

Теорема III.4. Пусть X — банахово пространство. Для всякого $x\in X$ пусть $\tilde{x}(\cdot)$ — линейный функционал на X^*, который приписывает каждому $\lambda\in X^*$ число $\lambda(x)$. Тогда отображение $J: x\to\tilde{x}$ есть изометрический изоморфизм между X и (возможно, собственным) подпространством в X^{**}.

Доказательство. Поскольку

$$|\tilde{x}(\lambda)|=|\lambda(x)|\leqslant\|\lambda\|_{X^*}\|x\|_X,$$

$\tilde{x}$ — ограниченный линейный функционал на X^* с нормой $\|\tilde{x}\|_{X^{**}}\leqslant\|x\|_X$. Из теорем III.5 и III.6 следует, что для данного x можно найти такое $\lambda\in X^*$, что

$$\|\lambda\|_{X^*}=1 \quad \text{и} \quad \lambda(x)=\|x\|_X.$$

Отсюда видно, что

$$\|\tilde{x}\|_{X^{**}}=\sup_{\lambda\in X^*,\ \|\lambda\|\leqslant 1}|\tilde{x}(\lambda)|\geqslant\|x\|_X,$$

и, значит,

$$\|\tilde{x}\|_{X^{**}}=\|x\|_X.$$

Следовательно, J есть изометрия X в X^{**}. ∎

Определение. Если отображение J, определенное в теореме III.4, сюръективно, то говорят, что X **рефлексивно**.

Пространства $L^p(\mathbb{R})$ рефлексивны при $1<p<\infty$, поскольку $(L^p)^{**}=(L^q)^*=L^p$, но $L^1(\mathbb{R})$ не рефлексивно. Все гильбертовы пространства рефлексивны. Пространство c_0 не рефлексивно, так как его второе сопряженное есть l_∞. Теория рефлексивных пространств развивается далее в задачах 22 и 26 этой главы и в задаче 15 гл. V.

III.3. Теорема Хана — Банаха

При работе с банаховыми пространствами часто приходится строить линейные функционалы с некоторыми определенными свойствами. Обычно это делается в два приема: сначала этот линейный функционал определяется на каком-нибудь подпространстве банахова пространства, на котором нужные свойства легко проверить, а затем привлекается (или доказывается) общая теорема, утверждающая, что любой такой функционал можно продолжить на все пространство с сохранением требуемых свойств. Одним из основных средств для второго шага оказывается следующая теорема (ее варианты появятся еще в § V.1 и в гл. XVI).

Теорема III.5 (теорема Хана—Банаха). Пусть X — вещественное векторное пространство, p — вещественнозначная функция, определенная на X и удовлетворяющая условию $p(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant \alpha p(x)+(1-\alpha)p(y)$ для всех x, y из X и $\alpha\in[0, 1]$. Предположим, что λ — линейный функционал, определенный на подпространстве $Y\subset X$ и удовлетворяющий неравенству $\lambda(x)\leqslant p(x)$ для всех $x\in Y$. Тогда существует линейный функционал Λ, определенный на X, такой, что $\Lambda(x)\leqslant p(x)$ для всех $x\in X$ и $\Lambda(x)=\lambda(x)$ для всех $x\in Y$.

Доказательство. Идея доказательства состоит в следующем. Сначала покажем, что если $z\in X$, но $z\notin Y$, то λ можно продолжить на пространство, натянутое на z и Y. А потом воспользуемся рассуждением по лемме Цорна и покажем, что подобный процесс позволяет продолжить λ на все пространство X.

Пусть $\tilde{Y}$ — подпространство, натянутое на Y и z. Продолжение λ на $\tilde{Y}$ (обозначим его $\tilde{\lambda}$) будет описано, коль скоро мы определим $\tilde{\lambda}(z)$, так как

$$\tilde{\lambda}(az+y)=a\tilde{\lambda}(z)+\lambda(y).$$

Пусть $y_1, y_2\in Y$; $\alpha, \beta>0$. Тогда

$$\begin{aligned}\beta\lambda(y_1)+\alpha\lambda(y_2)&=\lambda(\beta y_1+\alpha y_2)=(\alpha+\beta)\,\lambda\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}y_1+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}y_2\right)\leqslant\\&\leqslant(\alpha+\beta)\,p\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}(y_1-\alpha z)+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(y_2+\beta z)\right)\leqslant\\&\leqslant\beta p(y_1-\alpha z)+\alpha p(y_2+\beta z).\end{aligned}$$