пространства рефлексивны. Пространство $c_0$ не рефлексивно, так как его второе сопряженное есть $l_\infty$. Теория рефлексивных пространств развивается далее в задачах 22 и 26 этой главы и в задаче 15 гл. V.

## III.3. Теорема Хана — Банаха

При работе с банаховыми пространствами часто приходится строить линейные функционалы с некоторыми определенными свойствами. Обычно это делается в два приема: сначала этот линейный функционал определяется на каком-нибудь подпространстве банахова пространства, на котором нужные свойства легко проверить, а затем привлекается (или доказывается) общая теорема, утверждающая, что любой такой функционал можно продолжить на все пространство с сохранением требуемых свойств. Одним из основных средств для второго шага оказывается следующая теорема (ее варианты появятся еще в § V.1 и в гл. XVI).

***Теорема III.5*** (теорема Хана—Банаха). Пусть $X$ — вещественное векторное пространство, $p$ — вещественнозначная функция, определенная на $X$ и удовлетворяющая условию $p(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant \alpha p(x)+(1-\alpha)p(y)$ для всех $x$, $y$ из $X$ и $\alpha\in[0, 1]$. Предположим, что $\lambda$ — линейный функционал, определенный на подпространстве $Y\subset X$ и удовлетворяющий неравенству $\lambda(x)\leqslant p(x)$ для всех $x\in Y$. Тогда существует линейный функционал $\Lambda$, определенный на $X$, такой, что $\Lambda(x)\leqslant p(x)$ для всех $x\in X$ и $\Lambda(x)=\lambda(x)$ для всех $x\in Y$.

*Доказательство.* Идея доказательства состоит в следующем. Сначала покажем, что если $z\in X$, но $z\notin Y$, то $\lambda$ можно продолжить на пространство, натянутое на $z$ и $Y$. А потом воспользуемся рассуждением по лемме Цорна и покажем, что подобный процесс позволяет продолжить $\lambda$ на все пространство $X$.

Пусть $\tilde{Y}$ — подпространство, натянутое на $Y$ и $z$. Продолжение $\lambda$ на $\tilde{Y}$ (обозначим его $\tilde{\lambda}$) будет описано, коль скоро мы определим $\tilde{\lambda}(z)$, так как

$$\tilde{\lambda}(az+y)=a\tilde{\lambda}(z)+\lambda(y).$$

Пусть $y_1, y_2\in Y$; $\alpha, \beta>0$. Тогда

$$\begin{aligned}\beta\lambda(y_1)+\alpha\lambda(y_2)&=\lambda(\beta y_1+\alpha y_2)=(\alpha+\beta)\,\lambda\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}y_1+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}y_2\right)\leqslant\\ &\leqslant(\alpha+\beta)\,p\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}(y_1-\alpha z)+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(y_2+\beta z)\right)\leqslant\\ &\leqslant\beta p(y_1-\alpha z)+\alpha p(y_2+\beta z).\end{aligned}$$

Значит, для всех $\alpha$, $\beta > 0$ и $y_1$, $y_2 \in Y$

$$\frac{1}{\alpha}[-p(y_1-\alpha z)+\lambda(y_1)] \leqslant \frac{1}{\beta}[p(y_2+\beta z)-\lambda(y_2)].$$

Поэтому можно найти такое вещественное $a$, что

$$\sup_{\substack{y\in Y\\ \alpha>0}}\left[\frac{1}{\alpha}(-p(y-\alpha z)+\lambda(y))\right] \leqslant a \leqslant \inf_{\substack{y\in Y\\ \alpha>0}}\left[\frac{1}{\alpha}(p(y+\alpha z)-\lambda(y))\right].$$

Положим теперь $\tilde{\lambda}(z)=a$. Легко видеть, что полученное продолжение удовлетворяет неравенству $\tilde{\lambda}(x)\leqslant p(x)$ при всех $x\in\tilde{Y}$. Итак, мы показали, что $\lambda$ за один шаг может быть продолжен на одно измерение.

Проведем теперь рассуждение по лемме Цорна. Пусть $\mathscr{E}$ — набор расширений $e$ функционала $\lambda$, удовлетворяющих условию $e(x)\leqslant p(x)$ на тех подпространствах, где они определены. Введем в $\mathscr{E}$ частичное упорядочение, положив $e_1 \prec e_2$, если $e_2$ определено на бóльшем множестве, чем $e_1$, и $e_2(x)=e_1(x)$ там, где оба они определены. Пусть $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — линейно упорядоченное подмножество в $\mathscr{E}$; пусть $X_\alpha$ — то подпространство, на котором определено $e_\alpha$. Определим $e$ иа $\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$, положив $e(x)=e_\alpha(x)$, если $x\in X_\alpha$. Очевидно, $e_\alpha \prec e$, так что всякое линейно упорядоченное подмножество в $\mathscr{E}$ имеет верхнюю грань. В силу леммы Цориа, $\mathscr{E}$ содержит максимальный элемент $\Lambda$, определенный на иекотором множестве $X'$ и удовлетворяющий условию $\Lambda(x)\leqslant p(x)$ при $x\in X'$. Но $X'$ должно совпадать со всем $X$, так как в противном случае мы могли бы продолжить $\Lambda$ на более широкое пространство, добавляя, как и выше, еще одно измерение. Поскольку это противоречит максимальности $\Lambda$, должно быть $X=X'$. Значит, расширение $\Lambda$ определено всюду. ∎

В только что доказанной теореме $X$ — вещественное векторное пространство. Распространим теперь ее на случай комплексного $X$.

***Теорема III.6*** (теорема Хана — Банаха для комплексного случая). Пусть $X$ — комплексное векторное пространство, $p$ — вещественнозначная функция, определенная на $X$ и удовлетворяющая условию $p(\alpha x+\beta y)\leqslant|\alpha|p(x)+|\beta|p(y)$ для всех $x$, $y\in X$ и таких $\alpha$, $\beta\in\mathbb{C}$, что $|\alpha|+|\beta|=1$. Пусть $\lambda$ — комплексный линейный функционал, определенный на подпространстве $Y\subset X$ и удовлетворяющий условию $|\lambda(x)|\leqslant p(x)$ при всех $x\in Y$. Тогда существует комплексно линейный функционал $\Lambda$, определенный на $X$, удовлетворяющий условию $|\Lambda(x)|\leqslant p(x)$ при всех $x\in X$ и такой, что $\Lambda(x)=\lambda(x)$ для всех $x\in Y$.

*Доказательство.* Положим $l(x)=\operatorname{Re}\{\lambda(x)\}$; тогда $l$ — вещественно линейный функционал на $Y$, и, поскольку

$$l(ix)=\operatorname{Re}\{\lambda(ix)\}=\operatorname{Re}\{i\lambda(x)\}=-\operatorname{Im}\lambda(x),$$

мы видим, что $\lambda(x) = l(x) - il(ix)$. Так как $l$ вещественно линеен и $p(\alpha x + (1-\alpha) y) \leqslant \alpha p(x) + (1-\alpha) p(y)$ при $\alpha \in [0, 1]$, то $l$ имеет линейное расширение $L$ на все $X$, удовлетворяющее условию $L(x) \leqslant p(x)$ (по теореме III.5). Положим $\Lambda(x) = L(x) - iL(ix)$. Очевидно, что $\Lambda$ есть вещественно линейное расширение $\lambda$. Далее, $\Lambda(ix) = L(ix) - iL(-x) = i\Lambda(x)$, так что $\Lambda$ и комплексно линеен. Остается только показать, что $|\Lambda(x)| \leqslant p(x)$. Заметим сначала, что $p(\alpha x) = p(x)$, если $|\alpha| = 1$. Положим теперь $\theta = \operatorname{Arg}\{\Lambda(x)\}$ и воспользуемся тем, что $\operatorname{Re}\Lambda = L$; мы увидим, что

$$|\Lambda(x)| = e^{-i\theta}\Lambda(x) = \Lambda(e^{-i\theta}x) = L(e^{-i\theta}x) \leqslant p(e^{-i\theta}x) = p(x). \blacksquare$$

***Следствие 1.*** Пусть $X$ — нормированное линейное пространство, $Y$ — его подпространство и $\lambda$ — элемент $Y^*$. Тогда существует функционал $\Lambda \in X^*$, продолжающий $\lambda$ и удовлетворяющий условию $\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*}$.

*Доказательство.* Выберем $p(x) = \|\lambda\|_{Y^*} \|x\|$ и применим предыдущие теоремы. $\blacksquare$

***Следствие 2.*** Пусть $y$ — элемент нормированного линейного пространства $X$. Тогда существует ненулевой $\Lambda \in X^*$, такой, что $\Lambda(y) = \|\Lambda\|_{X^*} \|y\|$.

*Доказательство.* Пусть $Y$ — подпространство, состоящее из произведений $y$ на любые скаляры; положим $\lambda(ay) = a\|y\|$. Пользуясь следствием 1, можно построить $\Lambda$ с нормой $\|\Lambda\| = \|\lambda\|$, расширив $\lambda$ на все $X$. Но, поскольку $\Lambda(y) = \|y\|$, $\|\Lambda\| = 1$ и, следовательно,

$$\Lambda(y) = \|\Lambda\|_{X^*} \|y\|. \blacksquare$$

***Следствие 3.*** Пусть $Z$ — подпространство нормированного линейного пространства $X$, и пусть $y$ — элемент $X$, расстояние которого от $Z$ равно $d$. Тогда существует такой $\Lambda \in X^*$, что $\|\Lambda\| \leqslant 1$, $\Lambda(y) = d$ и $\Lambda(z) = 0$ для всех $z$ в $Z$.

Доказательство этого следствия предоставляется читателю (задача 10). Чтобы убедиться, насколько полезны эти следствия, докажем следующую общую теорему.

***Теорема III.7.*** Пусть $X$ — банахово пространство. Если $X^*$ сепарабельно, то $X$ также сепарабельно.

*Доказательство.* Пусть $\{\lambda_n\}$ — плотное множество в $X^*$. Выберем $x_n \in X$, $\|x_n\| = 1$ так, чтобы было

$$|\lambda_n(x_n)| \geqslant \|\lambda_n\|/2.$$

Пусть $\mathscr{D}$ — множество всех конечных линейных комбинаций $\{x_n\}$ с рациональными коэффициентами. Поскольку $\mathscr{D}$ счетно, достаточно показать, что $\mathscr{D}$ плотно в $X$. Если $\mathscr{D}$ не плотно в $X$, то существуют элемент $y \in X \setminus \mathscr{D}$ и линейный функционал $\lambda \in X^*$, такие, что $\lambda(y) \neq 0$, но $\lambda(x) = 0$ для всех $x \in \mathscr{D}$ (следствие 3). Пусть $\{\lambda_{n_k}\}$ — подпоследовательность $\{\lambda_n\}$, сходящаяся к $\lambda$. Тогда

$$\|\lambda - \lambda_{n_k}\|_X \geqslant |(\lambda - \lambda_{n_k})(x_{n_k})| = \\ = |\lambda_{n_k}(x_{n_k})| \geqslant \|\lambda_{n_k}\|/2,$$

откуда следует, что $\|\lambda_{n_k}\| \to 0$ при $k \to \infty$. Значит, $\lambda = 0$, и мы пришли к противоречию. Следовательно, $\mathscr{D}$ плотно и $X$ сепарабельно. ▮

Пример пространств $l_1$ и $l_\infty$ показывает, что обратная теорема не имеет места. Между прочим, теорема III.7 позволяет доказать, что $l_1$ не является сопряженным к $l_\infty$, так как $l_1$ сепарабельно, а $l_\infty$ нет.

## III.4. Операции над банаховыми пространствами

Мы уже познакомились с несколькими способами, при помощи которых из данных банаховых пространств можно строить новые. Последовательные сопряженные банаховых пространств суть банаховы пространства, и ограниченные операторы из одного банахова пространства в другое образуют банахово пространство. Далее, любое замкнутое подпространство банахова пространства есть также банахово пространство. Есть еще два других способа построения новых банаховых пространств, которые нам потребуются: переход к прямым суммам и факторпространствам.

Пусть $A$ — некоторое множество индексов (не обязательно счетное), и пусть $X_\alpha$ при каждом $\alpha \in A$ — банахово пространство. Положим

$$X = \left\{ \{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \,\middle|\, x_\alpha \in X_\alpha,\ \sum_{\alpha \in A} \|x_\alpha\|_{X_\alpha} < \infty \right\}.$$

Тогда $X$ с нормой

$$\|\{x_\alpha\}\| = \sum_{\alpha \in A} \|x_\alpha\|_{X_\alpha}$$

есть банахово пространство. Оно называется **прямой суммой** пространств $X_\alpha$ и часто записывается в виде $X = \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$. Отметим, что гильбертова прямая сумма и банахова прямая сумма пространств не обязательно совпадают. Так, если мы возьмем счетное число экземпляров $\mathbb{C}$, то прямой суммой банаховых пространств будет $l_1$, а гильбертовых — $l_2$. Однако если мы возьмем *конечное* число гильбертовых пространств, то их прямые суммы