существуют элемент $y \in X \setminus \mathscr{D}$ и линейный функционал $\lambda \in X^*$, такие, что $\lambda(y) \neq 0$, но $\lambda(x) = 0$ для всех $x \in \mathscr{D}$ (следствие 3). Пусть $\{\lambda_{n_k}\}$ — подпоследовательность $\{\lambda_n\}$, сходящаяся к λ. Тогда

$$\|\lambda - \lambda_{n_k}\|_X \geqslant |(\lambda - \lambda_{n_k})(x_{n_k})| = \\ = |\lambda_{n_k}(x_{n_k})| \geqslant \|\lambda_{n_k}\|/2,$$

откуда следует, что $\|\lambda_{n_k}\| \to 0$ при $k \to \infty$. Значит, $\lambda = 0$, и мы пришли к противоречию. Следовательно, $\mathscr{D}$ плотно и X сепарабельно. ∎

Пример пространств l_1 и l_∞ показывает, что обратная теорема не имеет места. Между прочим, теорема III.7 позволяет доказать, что l_1 не является сопряженным к l_∞, так как l_1 сепарабельно, а l_∞ нет.

III.4. Операции над банаховыми пространствами

Мы уже познакомились с несколькими способами, при помощи которых из данных банаховых пространств можно строить новые. Последовательные сопряженные банаховых пространств суть банаховы пространства, и ограниченные операторы из одного банахова пространства в другое образуют банахово пространство. Далее, любое замкнутое подпространство банахова пространства есть также банахово пространство. Есть еще два других способа построения новых банаховых пространств, которые нам потребуются: переход к прямым суммам и факторпространствам.

Пусть A — некоторое множество индексов (не обязательно счетное), и пусть X_α при каждом $\alpha \in A$ — банахово пространство. Положим

$$X = \left\{ \{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \,\middle|\, x_\alpha \in X_\alpha, \ \sum_{\alpha \in A} \|x_\alpha\|_{X_\alpha} < \infty \right\}.$$

Тогда X с нормой

$$\|\{x_\alpha\}\| = \sum_{\alpha \in A} \|x_\alpha\|_{X_\alpha}$$

есть банахово пространство. Оно называется **прямой суммой** пространств X_α и часто записывается в виде $X = \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$. Отметим, что гильбертова прямая сумма и банахова прямая сумма пространств не обязательно совпадают. Так, если мы возьмем счетное число экземпляров $\mathbb{C}$, то прямой суммой банаховых пространств будет l_1, а гильбертовых — l_2. Однако если мы возьмем *конечное* число гильбертовых пространств, то их прямые суммы как гильбертовых пространств и как банаховых пространств изоморфны в смысле § III.1.

Пусть M — замкнутое линейное подпространство банахова пространства X. Будь X гильбертовым пространством, мы могли бы писать $X = M \oplus M^{\perp}$. Мы сейчас введем банахово пространство, которое иногда может играть роль $M^{\perp}$ в случае банаховых пространств, где нет ортогональности. Если x и y — элементы X, будем считать, что $x \sim y$, когда $x - y \in M$. Тем самым определено отношение эквивалентности; обозначим множество классов через X/M. Как обычно, класс эквивалентности, содержащий x, обозначается $[x]$. Определим сложение и умножение на скаляр для классов эквивалентности:

$$\alpha[x] + \beta[y] = [\alpha x + \beta y].$$

Это определение корректно, так как класс в правой части зависит лишь от классов, из которых взяты x и y, а не от самих этих элементов. С такими операциями X/M становится комплексным векторным пространством (класс M есть нулевой элемент). Теперь положим

$$\|[x]\|_1 = \inf_{m \in M} \|x - m\|_X.$$

Нетрудно показать, что $\|\cdot\|_1$ — норма в X/M. Из $\|[x]\| = 0$ следует $[x] = 0$, так как M замкнуто. С помощью теоремы III.3 покажем, что X/M с такой нормой полно. Пусть $\{[x_n]\}_{n=1}^{\infty}$ — абсолютно суммируемая последовательность в X/M, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \inf_{m \in M} \|x_n - m\| < \infty.$$

Для всякого n выберем $m_n \in M$ так, что

$$\|x_n - m_n\| \leqslant 2 \inf_{m \in M} \|x_n - m\|.$$

Тогда $\{x_n - m_n\}$ абсолютно суммируема в X. Поскольку X полно, $\{x_n - m_n\}$ суммируема. Пусть

$$y = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} (x_n - m_n).$$

Тогда

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} [x_n] - [y] \right\|_1 \leqslant \left\| \sum_{n=1}^{N} x_n - y - \sum_{n=1}^{N} m_n \right\| \to 0 \text{ при } N \to \infty.$$

Это доказывает, что $\{[x_n]\}$ суммируема. Опять применяя теорему III.3, заключаем, что X/M полно. Оно называется **фактор-**

пространством X по M. Читатель сам разберется в деталях следующего простого примера.

Пример. Пусть $X=C[0, 1]$ и $M=\{f \mid f(0)=0\}$. Тогда $X/M=\mathbb{C}$.

III.5. Теорема Бэра о категории и ее следствия

При изучении банаховых пространств часто приходится доказывать, что некоторые множества имеют непустые множества внутренних точек. Вот пример:

Предложение. Пусть X и Y—нормированные линейные пространства. Тогда линейное отображение $T\colon X \to Y$ ограничено в том и лишь в том случае, если множество

$$T^{-1}[\{y \mid \|y\|_Y \leqslant 1\}]$$

имеет внутренние точки.

Доказательство. Предположим, что T дано и что интересующее нас множество содержит шар

$$\{x \mid \|x-x_0\|_X < \varepsilon\}.$$

Тогда из $\|x\| < \varepsilon$ следует, что

$$\|Tx\| \leqslant \|T(x+x_0)\| + \|Tx_0\| \leqslant 1 + \|Tx_0\|,$$

так как $x+x_0$ содержится в шаре радиуса ε вокруг точки x_0. Значит, для всех $x \in X$

$$\|Tx\| \leqslant \varepsilon^{-1}(\|Tx_0\|+1)\|x\|$$

и, следовательно, T ограничено. Обратное доказывается совсем просто. ∎

Итак, очень важно знать, когда множество внутренних точек не пусто. На этот счет для полных метрических пространств существует весьма замечательная теорема. Но сначала введем следующее определение.

Определение. Множество S в метрическом пространстве M называется **нигде не плотным**, если его замыкание $\bar{S}$ не имеет внутренних точек.

Теорема III.8 (теорема Бэра о категории). Полное метрическое пространство не может быть объединением счетного числа нигде не плотных множеств.

Доказательство. Идея доказательства проста. Предположим, что M—полное метрическое пространство и что $M=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, причем