пространством X по M. Читатель сам разберется в деталях следующего простого примера.

Пример. Пусть $X=C[0, 1]$ и $M=\{f \mid f(0)=0\}$. Тогда $X/M=\mathbb{C}$.

III.5. Теорема Бэра о категории и ее следствия

При изучении банаховых пространств часто приходится доказывать, что некоторые множества имеют непустые множества внутренних точек. Вот пример:

Предложение. Пусть X и Y—нормированные линейные пространства. Тогда линейное отображение T: $X \to Y$ ограничено в том и лишь в том случае, если множество

$$T^{-1}[\{y \mid \|y\|_Y \leqslant 1\}]$$

имеет внутренние точки.

Доказательство. Предположим, что T дано и что интересующее нас множество содержит шар

$$\{x \mid \|x-x_0\|_X < \varepsilon\}.$$

Тогда из $\|x\| < \varepsilon$ следует, что

$$\|Tx\| \leqslant \|T(x+x_0)\| + \|Tx_0\| \leqslant 1 + \|Tx_0\|,$$

так как $x+x_0$ содержится в шаре радиуса ε вокруг точки x_0. Значит, для всех $x \in X$

$$\|Tx\| \leqslant \varepsilon^{-1}(\|Tx_0\|+1)\|x\|$$

и, следовательно, T ограничено. Обратное доказывается совсем просто. ∎

Итак, очень важно знать, когда множество внутренних точек не пусто. На этот счет для полных метрических пространств существует весьма замечательная теорема. Но сначала введем следующее определение.

Определение. Множество S в метрическом пространстве M называется **нигде не плотным**, если его замыкание $\bar{S}$ не имеет внутренних точек.

Теорема III.8 (теорема Бэра о категории). Полное метрическое пространство не может быть объединением счетного числа нигде не плотных множеств.

Доказательство. Идея доказательства проста. Предположим, что M—полное метрическое пространство и что $M=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, причем каждое A_n нигде не плотно. Затем построим такую последовательность Коши $\{x_m\}$, которая не попадает ни в одно из A_n, так что и ее предельная точка x (которая лежит в M в силу полноты) не попадает ни в одно A_n. Но это находится в противоречии с утверждением $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Поскольку A_1 нигде не плотно, мы можем найти $x_1 \notin \overline{A}_1$. Возьмем открытый шар B_1 вокруг x_1, такой, что $B_1 \cap A_1 = \varnothing$ и радиус B_1 меньше единицы. Так как A_2 нигде не плотно, можно найти $x_2 \in B_1 \setminus \overline{A}_2$. Пусть B_2 — открытый шар с центром в x_2, такой, что $\overline{B}_2 \subset B_1$, $B_2 \cap A_2 = \varnothing$ и радиус B_2 меньше $^1/_2$. Продолжая по индукции, выберем $x_n \in B_{n-1} \setminus \overline{A}_n$ и открытый шар B_n с центром в x_n, такой, что $\overline{B}_n \subset B_{n-1}$, $B_n \cap A_n = \varnothing$ и радиус B_n меньше 2^{1-n}. Тогда $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность Коши, так как из $m, n > N$ следует, что $x_n, x_m \in B_N$ и, значит,

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant 2^{1-N} + 2^{1-N} = 2^{2-N} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0.$$

Пусть $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Так как $x_n \in B_n$ при $n \geqslant N$, то

$$x \in \overline{B}_N \subset B_{N-1}.$$

Значит, $x \notin A_{N-1}$ при любом N, что противоречит условию $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. ∎

Теорема Бэра говорит о том, что если $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, то некоторые из множеств $\overline{A}_n$ должны иметь внутренние точки. Практически редко приходится пользоваться прямо этой теоремой. Обычно пользуются одним из ее следствий. Первое из них известно под именем теоремы Банаха — Штейнгауза или принципа равномерной ограниченности.

Теорема III.9 (принцип равномерной ограниченности). Пусть X — банахово пространство. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство ограниченных линейных преобразований из X в какое-либо нормированное линейное пространство Y. Допустим, что для всякого $x \in X$ множества $\{\|Tx\|_Y \mid T \in \mathcal{F}\}$ ограничены. Тогда $\{\|T\| \mid T \in \mathcal{F}\}$ ограничено.

Доказательство. Пусть $B_n = \{x \mid \|Tx\| \leqslant n$ при всех $T \in \mathcal{F}\}$. По предположению каждый x принадлежит некоторому B_n и, значит, $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Более того, каждое B_n замкнуто (так как каждое T непрерывно). По теореме Бэра о категории какое-либо B_n имеет внутренние точки. С помощью тех же рассуждений, что и в предложении в начале этого раздела, заключаем, что все $\|T\|$ равномерно ограничены. ∎

В качестве типичного применения этой теоремы приведем такое следствие (см. также задачу 13):

Следствие. Пусть X и Y — банаховы пространства, и пусть $B(\cdot, \cdot)$ — билинейное отображение из $X \times Y$ в $\mathbb{C}$, непрерывное по каждой переменной в отдельности, т. е. $B(x, \cdot)$ для любого фиксированного x и $B(\cdot, y)$ для любого фиксированного y есть ограниченное линейное преобразование. Тогда $B(\cdot, \cdot)$ непрерывно по совокупности переменных, т. е. если $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$, то $B(x_n, y_n) \to 0$.

Доказательство. Пусть $T_n(y) = B(x_n, y)$. Так как $B(x_n, \cdot)$ непрерывно, то всякое T_n ограничено. Так как $x_n \to 0$ и $B(\cdot, y)$ ограничено, $\{\|T_n(y)\|\}$ ограничено при всяком фиксированном y. Следовательно, существует такое C, что

$$\|T_n(y)\| \leqslant C\|y\|$$

при всех n. Значит,

$$\|B(x_n, y_n)\| = \|T_n(y_n)\| \leqslant C\|y_n\| \to 0$$

при $n \to \infty$. ∎

Заметим, что даже в $\mathbb{R}^2$ для нелинейных функций из непрерывности по каждой переменной не следует непрерывность по двум переменным. Стандартный пример:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad \text{если} \quad \langle x, y\rangle \neq \langle 0, 0\rangle,$$
$$f(0, 0) = 0.$$

Второе применение теоремы Бэра о категории приводит к следующей группе результатов.

Теорема III.10 (теорема об открытом отображении). Пусть $T\colon X \to Y$ — ограниченное линейное преобразование одного банахова пространства X *на* другое банахово пространство Y. Тогда если M — открытое множество в X, то $T[M]$ открыто в Y.

Доказательство. Сделаем ряд замечаний, которые упростят доказательство. Надо показать только, что для всякой окрестности N точки x множество $T[N]$ есть окрестность $T(x)$. Так как $T[x+N] = T(x) + T[N]$, то достаточно показать это лишь для $x = 0$. Поскольку окрестности содержат шары, достаточно показать, что $T[B_r^X] \supset B_{r'}^Y$ для некоторого r', где

$$B_r^X = \{x \in X \mid \|x\| < r\}.$$

Однако так как $T[B_r^X] = rT[B_1^X]$, нужно только показать, что $T[B_r^X]$ есть окрестность нуля при некотором r. Наконец, принимая во внимание метод сдвига, использованный в доказательстве предложения, достаточно показать, что $T[B_r^X]$ имеет внутренние точки при некотором r.

Поскольку T сюръективно,

$$Y=\bigcup_{n=1}^{\infty} T[B_n]$$

и какое-либо $\overline{T[B_n]}$ имеет непустую внутренность. Теперь начинается трудная работа, так как нам нужно, чтобы $T[B_n]$ имело непустую внутренность. При помощи растяжения и сдвига можно добиться того, чтобы B_ε содержалось в $\overline{T[B_1]}$; мы покажем, что $\overline{T[B_1]}\subset T[B_2]$, и тем самым завершим доказательство.

Пусть $y\in\overline{T[B_1]}$. Выберем $x_1\in B_1$ так, чтобы $y-Tx_1\in B_{\varepsilon/2}\subset\overline{T[B_{1/2}]}$. Выберем теперь $x_2\in B_{1/2}$ так, чтобы

$$y-Tx_1-Tx_2\in B_{\varepsilon/4}.$$

По индукции выберем $x_n\in B_{2^{1-n}}$ так, чтобы

$$y-\sum_{j=1}^{n} Tx_j\in B_{\varepsilon/2^{n-1}}.$$

Тогда $x=\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ существует и лежит в B_2 и

$$y=\sum_{i=1}^{\infty} Tx_i=Tx.$$

Значит, $y\in T[B_2]$. ∎

Теорема III.11 (теорема об обратном отображении). Непрерывная биекция одного банахова пространства на другое имеет непрерывное обратное.

Доказательство. Поскольку T открыто, T^{-1} непрерывно. ∎

Задача 19 дает пример применения этого результата.

Определение. Пусть T—отображение нормированного линейного пространства X в нормированное линейное пространство Y. **График** T, обозначаемый через $\Gamma(T)$, определяется как

$$\Gamma(T)=\{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle\in X\times Y,\ y=Tx\}.$$

Теорема III.12 (теорема о замкнутом графике). Пусть X и Y—банаховы пространства и T—линейное отображение X в Y. В этом случае T ограничено тогда и только тогда, когда график T замкнут.

Доказательство. Допустим, что $\Gamma(T)$ замкнут. Тогда, поскольку T линейно, $\Gamma(T)$ есть подпространство банахова пространства $X\oplus Y$

и, следовательно, является банаховым пространством с нормой

$$\| \langle x, Tx \rangle \| = \| x \| + \| Tx \|.$$

Рассмотрим непрерывные отображения

$$\Pi_1 : \langle x, Tx \rangle \longrightarrow x, \quad \Pi_2 : \langle x, Tx \rangle \longrightarrow Tx;$$

Π_1 — биекция, и, значит, по теореме об обратном отображении Π_1^{-1} непрерывно. Но $T = \Pi_2 \circ \Pi_1^{-1}$, так что T непрерывно. Доказательство обратного тривиально. ∎

Во избежание путаницы в дальнейшем подчеркнем, что в этой теореме неявно предполагается, что T определено на всем X. Позже мы будем иметь дело с преобразованиями, определенными на *алгебраических* подпространствах в X (а не на всем X); такие преобразования могут иметь замкнутый график, не будучи непрерывными. Чтобы оценить, что реально может дать теорема о замкнутом графике, рассмотрим такие три утверждения:

(a) x_n сходится к некоторому x;
(b) Tx_n сходится к некоторому y;
(c) $Tx = y$.

A priori, чтобы доказать непрерывность T, следует показать, что из (a) следуют (b) и (c). Если же воспользоваться теоремой о замкнутом графике, то достаточно доказать, что из (a) и (b) следует (c).

Еще одно следствие теоремы о замкнутом графике позволяет сделать важные для математической физики выводы.

Следствие (теорема Хеллингера — Теплица). Пусть A — всюду определенный оператор на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, причем $(x, Ay) = (Ax, y)$ для всех x, y из $\mathcal{H}$. Тогда A ограничен.

Доказательство. Докажем, что график $\Gamma(A)$ замкнут. Предположим, что $\langle x_n, Ax_n \rangle \longrightarrow \langle x, y \rangle$. Достаточно доказать, что $\langle x, y \rangle \in \Gamma(A)$, т. е. что $y = Ax$. Но для любого $z \in \mathcal{H}$

$$(z, y) = \lim_{n \to \infty} (z, Ax_n) = \lim_{n \to \infty} (Az, x_n) = (Az, x) = (z, Ax).$$

Следовательно, $y = Ax$ и $\Gamma(A)$ замкнут. ∎

Как мы увидим, эта теорема причиняет массу технических осложнений, так как в квантовой механике есть операторы (подобные энергии), которые не ограничены, но должны в каком-нибудь смысле удовлетворять условию

$$(x, Ay) = (Ax, y).$$

Теорема Хеллингера — Теплица утверждает, что эти операторы не могут быть определены всюду. Значит, они определены на подпространствах $D(A)$ пространства $\mathcal{H}$, и поэтому часто бывает трудно сказать, что такое $A+B$ или AB. Например, $A+B$ a priori определено только на области $D(A)\cap D(B)$, которая может оказаться равной $\{0\}$ даже в том случае, когда $D(A)$ и $D(B)$ плотны. Мы вернемся к этим вопросам в гл. VIII и X.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ III.1. Банаховы пространства названы так в честь С. Банаха, который в течение 20-х годов провел важные исследования нормированных линейных пространств, завершением которых явилась его книга: S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Monografie Mat., I, Warszawa, 1932 [1]). Хорошим элементарным учебником по материалу этой главы является книга: A. Friedman, Foundations of Modern Analysis, Holt, New York, 1970. Теорема III.1 там доказана подробно, за исключением части (с), которая доказана лишь для $r=1$. Чтобы доказать общий случай, когда $p^{-1}+q^{-1}=r^{-1}$, заметим, что

$$|fg|^r=|f|^r|g|^r,$$

и воспользуемся неравенством Гёльдера для специального случая

$$\frac{1}{(p/r)}+\frac{1}{(q/r)}=1;$$

получим

$$\int|fg|^r\leqslant\left(\int|f|^{rp/r}\right)^{r/p}\left(\int|g|^{rq/r}\right)^{r/q},$$

или

$$\left(\int|fg|^r\right)^{1/r}\leqslant\left(\int|f|^p\right)^{1/p}\left(\int|g|^q\right)^{1/q}.$$

Пусть X — банахово пространство. При изучении банахова пространства $\mathscr{L}(X, X)$ операторов из X в само X можно использовать тот факт, что оно представляет собой в то же время алгебру. Тогда для исследования его структуры можно применять такие алгебраические понятия, как идеалы и коммутаторы. Некоторые важные идеалы алгебры $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{H})$, где $\mathscr{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, изучаются в § VI.6. Общая теория операторных алгебр и ее применения изучаются в следующих томах.

§ III.2. Доказательство того, что $(L^p)^*=L^q$, можно найти в книге Ройдена (см. замечания к гл. I), а можно доказать это непосредственно, пользуясь понятием равномерно выпуклого пространства (см. задачи 25 и 26 гл. III и задачу 15 гл. V). В § VI.6 обсуждаются сопряженные некоторых подалгебр алгебры $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{H})$.

§ III.3. Теорема Хана — Банаха восходит к работам Хелли: E. Helly, Über lineare funktional Operationen, *Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien, Math.-Nat. Kl.*, **121** IIa (1912), 265—297, и Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Monets. Math. Phys.*, **31** (1921), 60—91. Современная версия принадлежит Хану: H. Hahn, Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen, *J. reine angew. Math.*, **157** (1926), 214—229, и Банаху: S. Banach, Sur les fonctionelles linéaires, I, II, *Studia Math.*, **1** (1929), 211—216, 223—239. Хороший пример конкретного применения теоремы Хана — Банаха можно найти в упомянутой выше книге Фридмана. Там показано, как с помощью

[1]) Украинский перевод: С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ, «Радянська школа», 1948.