трудно сказать, что такое $A+B$ или AB. Например, $A+B$ a priori определено только на области $D(A)\cap D(B)$, которая может оказаться равной $\{0\}$ даже в том случае, когда $D(A)$ и $D(B)$ плотны. Мы вернемся к этим вопросам в гл. VIII и X.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ III.1. Банаховы пространства названы так в честь С. Банаха, который в течение 20-х годов провел важные исследования нормированных линейных пространств, завершением которых явилась его книга: S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Monografie Mat., I, Warszawa, 1932 [1]). Хорошим элементарным учебником по материалу этой главы является книга: A. Friedman, Foundations of Modern Analysis, Holt, New York, 1970. Теорема III.1 там доказана подробно, за исключением части (с), которая доказана лишь для $r=1$. Чтобы доказать общий случай, когда $p^{-1}+q^{-1}=r^{-1}$, заметим, что

$$|fg|^r=|f|^r|g|^r,$$

и воспользуемся неравенством Гёльдера для специального случая

$$\frac{1}{(p/r)}+\frac{1}{(q/r)}=1;$$

получим

$$\int|fg|^r\leqslant\left(\int|f|^{rp/r}\right)^{r/p}\left(\int|g|^{rq/r}\right)^{r/q},$$

или

$$\left(\int|fg|^r\right)^{1/r}\leqslant\left(\int|f|^p\right)^{1/p}\left(\int|g|^q\right)^{1/q}.$$

Пусть X — банахово пространство. При изучении банахова пространства $\mathscr{L}(X, X)$ операторов из X в само X можно использовать тот факт, что оно представляет собой в то же время алгебру. Тогда для исследования его структуры можно применять такие алгебраические понятия, как идеалы и коммутаторы. Некоторые важные идеалы алгебры $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{H})$, где $\mathscr{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, изучаются в § VI.6. Общая теория операторных алгебр и ее применения изучаются в следующих томах.

§ III.2. Доказательство того, что $(L^p)^*=L^q$, можно найти в книге Ройдена (см. замечания к гл. I), а можно доказать это непосредственно, пользуясь понятием равномерно выпуклого пространства (см. задачи 25 и 26 гл. III и задачу 15 гл. V). В § VI.6 обсуждаются сопряженные некоторых подалгебр алгебры $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{H})$.

§ III.3. Теорема Хана — Банаха восходит к работам Хелли: E. Helly, Über lineare funktional Operationen, *Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien, Math.-Nat. Kl.*, 121 IIa (1912), 265—297, и Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Monets. Math. Phys.*, **31** (1921), 60—91. Современная версия принадлежит Хану: H. Hahn, Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen, *J. reine angew. Math.*, **157** (1926), 214—229, и Банаху: S. Banach, Sur les fonctionelles linéaires, I, II, *Studia Math.*, **1** (1929), 211—216, 223—239. Хороший пример конкретного применения теоремы Хана — Банаха можно найти в упомянутой выше книге Фридмана. Там показано, как с помощью

[1]) Украинский перевод: С. Банах, Курс функцiонального аналiзу, Київ, «Радянська школа», 1948.

теоремы Хана — Банаха доказывается существование функции Грина для двумерной задачи Дирихле.

§ *III.5*. Теорема Бэра была им доказана для вещественной прямой: R. Baire, Sur les fonctions de variables réelles, *Ann. Math.*, 3 (1899), 1—32. Современная версия доказана Куратовским: C. Kuratowski, La propriété de Baire dans les espaces métriques, *Fund. Math*, 16 (1930), 390—394, и Банахом: S. Banach, Théorèms sur les ensembles de premières catégorie, *Fund. Math.*, 16 (1930), 395—398. Теорема Банаха — Штейнгауза доказана в работе: S. Banach, H. Steinhaus, Sur le principe de la condensation des singularités, *Fund. Math.*, 9 (1927), 50—61. Обсуждение теоремы Бэра и ее следствий есть в книге Лорха (см. замечания к § II.5). Происхождение термина «категория» следующее: объединение счетного числа нигде не плотных множеств называется множеством **первой категории**. Все остальные множества — **второй категории**. Теорема Бэра утверждает, что любое полное метрическое пространство — второй категории.

Дополнения к множествам первой категории иногда называют остаточными множествами. Это множества, содержащие счетное пересечение открытых плотных множеств. Из теоремы Бэра следует, что любое остаточное множество в полном метрическом пространстве плотно в нем (задача 21).

Если в метрическом пространстве какое-то утверждение справедливо на остаточном множестве, то часто говорят, что оно «имеет место почти всюду», следовательно, множества первой категории играют роль «множеств меры нуль». Некоторые занятные результаты относительно этого понятия «почти всюду» можно найти в книге Шоке: G. Choquet, Lectures in Analysis, v. I, Benjamin, New York, 1969, pp. 120—126. Предостережение: существуют множества $X \subset [0, 1]$ первой категории меры 1! Таким образом, два понятия «почти всюду» по Лебегу и по Бэру совершенно различны.

Существуют и другие топологические пространства, кроме полных метрических, обладающие тем свойством, что остаточные множества плотны в них; такие пространства называют пространствами Бэра. Например, любое локально компактное пространство есть пространство Бэра. Дальнейшее обсуждение см. в книге Шоке на стр. 105—120.

ЗАДАЧИ

†*1*. Докажите, что $L^\infty(\mathbb{R})$ — банахово пространство.

†*2*. (a) Докажите, что l_p и c_0 сепарабельны, а l_∞ — нет.
(b) Докажите, что $s \subset l_p$ при всех p.

†*3*. Докажите, что нормированное линейное пространство полно тогда и только тогда, когда каждая абсолютно суммируемая последовательность суммируема. [*Указание:* чтобы доказать, что последовательность Коши сходится, достаточно показать, что сходится какая-либо ее подпоследовательность.]

**4*. Докажите, что все нормы в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны. [*Указание:* воспользуйтесь тем, что единичная сфера компактна в евклидовой топологии.]

†*5*. Докажите, что $C_\infty(\mathbb{R})$ есть пополнение $\varkappa(\mathbb{R})$.

6. Докажите, что если $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \in l_1$, то линейный функционал на c_0, заданный формулой

$$\Lambda(\{a_k\}_{k=1}^\infty) = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k a_k,$$

имеет норму $\sum_{k=1}^\infty |\lambda_k|$.