теоремы Хана — Банаха доказывается существование функции Грина для двумерной задачи Дирихле.

§ *III.5*. Теорема Бэра была им доказана для вещественной прямой: R. Baire, Sur les fonctions de variables réelles, *Ann. Math.*, 3 (1899), 1—32. Современная версия доказана Куратовским: C. Kuratowski, La propriété de Baire dans les espaces métriques, *Fund. Math*, 16 (1930), 390—394, и Банахом: S. Banach, Théorèms sur les ensembles de premières catégorie, *Fund. Math.*, 16 (1930), 395—398. Теорема Банаха — Штейнгауза доказана в работе: S. Banach, H. Steinhaus, Sur le principe de la condensation des singularités, *Fund. Math.*, 9 (1927), 50—61. Обсуждение теоремы Бэра и ее следствий есть в книге Лорха (см. замечания к § II.5). Происхождение термина «категория» следующее: объединение счетного числа нигде не плотных множеств называется множеством **первой категории**. Все остальные множества — **второй категории**. Теорема Бэра утверждает, что любое полное метрическое пространство — второй категории.

Дополнения к множествам первой категории иногда называют остаточными множествами. Это множества, содержащие счетное пересечение открытых плотных множеств. Из теоремы Бэра следует, что любое остаточное множество в полном метрическом пространстве плотно в нем (задача 21).

Если в метрическом пространстве какое-то утверждение справедливо на остаточном множестве, то часто говорят, что оно «имеет место почти всюду», следовательно, множества первой категории играют роль «множеств меры нуль». Некоторые занятные результаты относительно этого понятия «почти всюду» можно найти в книге Шоке: G. Choquet, Lectures in Analysis, v. I, Benjamin, New York, 1969, pp. 120—126. Предостережение: существуют множества $X \subset [0, 1]$ первой категории меры 1! Таким образом, два понятия «почти всюду» по Лебегу и по Бэру совершенно различны.

Существуют и другие топологические пространства, кроме полных метрических, обладающие тем свойством, что остаточные множества плотны в них; такие пространства называют пространствами Бэра. Например, любое локально компактное пространство есть пространство Бэра. Дальнейшее обсуждение см. в книге Шоке на стр. 105—120.

ЗАДАЧИ

†*1*. Докажите, что $L^\infty(\mathbb{R})$ — банахово пространство.

†*2*. (a) Докажите, что l_p и c_0 сепарабельны, а l_∞ — нет.
(b) Докажите, что $s \subset l_p$ при всех p.

†*3*. Докажите, что нормированное линейное пространство полно тогда и только тогда, когда каждая абсолютно суммируемая последовательность суммируема. [*Указание:* чтобы доказать, что последовательность Коши сходится, достаточно показать, что сходится какая-либо ее подпоследовательность.]

**4*. Докажите, что все нормы в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны. [*Указание:* воспользуйтесь тем, что единичная сфера компактна в евклидовой топологии.]

†*5*. Докажите, что $C_\infty(\mathbb{R})$ есть пополнение $\varkappa(\mathbb{R})$.

6. Докажите, что если $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \in l_1$, то линейный функционал на c_0, заданный формулой

$$\Lambda(\{a_k\}_{k=1}^\infty) = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k a_k,$$

имеет норму $\sum_{k=1}^\infty |\lambda_k|$.

7. Докажите, пользуясь теоремой Хана—Банаха, что $l_\infty = l_1^*$, но $l_\infty^* \neq l_1$.

8. (a) Докажите, что существует линейный функционал на $L^\infty(\mathbb{R})$, равный нулю на $C(\mathbb{R})$.
(b) Докажите, что существует линейный функционал λ на $L^\infty(\mathbb{R})$, такой, что $\lambda(f) = f(0)$ для всякой $f \in C(\mathbb{R})$.

9. Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство и λ — ограниченный линейный функционал на подпространстве $\mathscr{M}$, не обязательно замкнутом. Опишите непрерывные расширения λ.

†10. Докажите третье следствие теоремы Хана—Банаха.

11. Докажите, что на $l_\infty(\mathbb{R})$ существует такой линейный функционал λ, что

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \lambda(\{a_n\}_{n=1}^\infty) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n;$$

$l_\infty(\mathbb{R}) = \{a \mid a \in l_\infty,\ a_n \in \mathbb{R}$ при всех $n\}$.

†12. Докажите утверждение примера в конце § 4.

13. Воспользуйтесь принципом равномерной ограниченности, чтобы получить другое доказательство теоремы Хеллингера—Теплица.

*14. Пусть X — банахово пространство. Приведите пример всюду определенного, но разрывного линейного функционала λ. Докажите непосредственно, что λ не замкнут.

15. Пусть $\mathscr{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Пусть $\{y_n\}$ — последовательность элементов $\mathscr{H}$. Докажите, что следующие два утверждения эквивалентны:
(a) $(x, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall x \in \mathscr{H}$;
(b) $(x_m, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ при каждом $m = 1, 2, \ldots$, и $\{\|y_n\|\}_{n=1}^\infty$ ограничена.

16. Подмножество S в банаховом пространстве называется **слабо ограниченным**, если $\sup_{x\in S} |\lambda(x)| < \infty$ при всех $\lambda \in X^*$; S называется **сильно ограниченным**, если $\sup_{x\in S} \|x\| < \infty$. Докажите, что множество сильно ограничено тогда и только тогда, когда оно слабо ограничено (см. § V.7).

17. Докажите, что раздельно непрерывный полилинейный функционал на банаховом пространстве непрерывен.

18. Распространите теорему Хеллингера—Теплица на пары операторов A, B, удовлетворяющих равенству

$$(Ax, y) = (x, By).$$

19. Пусть X — банахово пространство относительно любой из норм $\|\cdot\|_1$ или $\|\cdot\|_2$. Допустим, что $\|\cdot\|_1 \leqslant C\|\cdot\|_2$ при некотором C. Докажите, что существует D, для которого $\|\cdot\|_2 \leqslant D\|\cdot\|_1$.

20. Почему одноточечное пространство не нарушает теоремы Бэра?

*21. Докажите, что любое счетное пересечение плотных открытых множеств в полном метрическом пространстве плотно.

22. (a) Докажите, что банахово пространство X рефлексивно тогда и только тогда, когда рефлексивно X^*. [*Указание:* если $X \neq X^{**}$, найдите ограниченный линейный функционал на X^{**}, равный нулю на X.]
(b) Докажите, что если X не рефлексивно, то и $(\ldots(X^*)^*\ldots)^*$ не рефлексивно.

23. Пусть X — гильбертово пространство и $\mathcal{M}$ — замкнутое подпространство. Покажите, что ограничение естественного отображения π: $X \longrightarrow X/\mathcal{M}$ на $\mathcal{M}^{\perp}$ есть изоморфизм между $\mathcal{M}^{\perp}$ и $X/\mathcal{M}$.

24. Пусть l — линейный функционал на вещественном банаховом пространстве X. Докажите, что $X/\mathrm{Ker}\, l$ изоморфно $\mathbb{R}$ с обычной нормой и что естественная проекция π: $X \longrightarrow X/\mathrm{Ker}\, l = \mathbb{R}$ связана с l соотношением $l = \pm \| l \| \pi$.

25. Банахово пространство называется **равномерно выпуклым**, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $\| x \| = \| y \| = 1$ и $\| {}^1/_2 (x+y) \| > 1-\delta$ следует $\| x-y \| < \varepsilon$; это означает, что единичный шар равномерно выпуклый. В задаче 15 гл. V мы убедимся, что всякое равномерно выпуклое пространство рефлексивно.
(a) Докажите непосредственно, что $L^1(\mathbb{R})$ и $L^{\infty}(\mathbb{R})$ не являются равномерно выпуклыми.
(b) Докажите, что всякое гильбертово пространство равномерно выпукло.
*(c) Докажите, что $L^p(X, d\mu)$ равномерно выпукло при $p \geqslant 2$. *Указание:* докажите, что при $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$|\alpha+\beta|^p+|\alpha-\beta|^p \leqslant 2^{p-1}(|\alpha|^p+|\beta|^p),$$

показав предварительно, что

$$(|\alpha+\beta|^p+|\alpha-\beta|^p)^{1/p} \leqslant \sqrt{2}\,(|\alpha|^2+|\beta|^2)^{1/2}.$$

Примечания. 1. L^p на самом деле равномерно выпукло для всех $1 < p < \infty$, но доказательство для $1 < p < \infty$ труднее; ср. G. Köthe, Topological Vector Spaces, I, Springer, 1969, pp. 358—359.

2. Равномерно выпуклые пространства были введены в работе: J. Clarkson, Uniformly convex spaces, *Trans. AMS*, 40 (1936). 396—414.

3. М. Дей привел примеры рефлексивных банаховых пространств, которые не являются равномерно выпуклыми: M. Day, Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces, *Bull. AMS*, 47 (1941), 313—317; см. также G. Köthe, pp. 360—363.

26. (a) Говорят, что два банаховых пространства X и Y **строго сопряжены**, если существует отображение f: $X \longrightarrow Y^*$, являющееся изометрией, причем индуцированное отображение f^*: $Y \longrightarrow X^*$ — тоже изометрия. Докажите, что если X и Y строго сопряжены и X рефлексивно, то $Y = X^*$ и $X = Y^*$. [*Указание:* воспользуйтесь теоремой Хана — Банаха.]
(b) Докажите, что $L^p(X, d\mu)$ и $L^q(X, d\mu)$ строго сопряжены, если $p^{-1}+q^{-1}=1$.
(c) Докажите, что $L^p(X, d\mu)^* = L^q(X, d\mu)$, если $1 < p < \infty$ и $p^{-1}+q^{-1}=1$. [*Указание:* воспользуйтесь задачей 25 и задачей 15 гл. V.]

*27. Докажите теорему Банаха — Шаудера: пусть T — непрерывное линейное отображение T: $E \longrightarrow F$, где E и F — банаховы пространства. Тогда либо $T[A]$ открыто в $T[E]$ для любого открытого $A \subset E$, либо $T[E]$ первой категории в $\overline{T[E]}$ (см. замечания к § 5, где определяется понятие категории).

28. (a) Докажите, что каждое факторпространство пространства l_2 по замкнутому подпространству изометрически изоморфно либо l_2, либо $\mathbb{C}^N$ с некоторым N.
(b) Докажите, что l_1 топологически не изоморфно никакому факторпространству l_2.

29. Пусть X — сепарабельное банахово пространство. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ — плотное подмножество в единичном шаре в X. Определим отображение

$l_1 \longrightarrow X$, полагая

$$A\colon \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots \rangle \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n.$$

(a) Докажнте, что A корректно определено и непрерывно.

(b) Докажите, что $\operatorname{Ker} A$ замкнуто и что A «поднимается» до непрерывного отображения $\hat{A}\colon\ l_1/\operatorname{Ker} A \longrightarrow X$.

(c) Докажите, что $\operatorname{Ran} \hat{A} = \operatorname{Ran} A$ есть все пространство X. *Указание:* при данном x с $\|x\| = 1$ выберите рекурсивно $x_{n(i)}$, требуя, чтобы

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{k} 2^{-i+1} x_{n(i)} \right\| \leqslant 2^{-k}.$$

(d) Сделайте заключенне, что любое сепарабельное банахово простраиство топологически изоморфно какому-либо из факторпространств пространства l_1.

(e) Замеияя в (c) число 2 на 3, 4, ..., покажите, что на самом деле $\hat{A}$ — изометрия.

30. Пусть X — банахово простраиство и Y — его замкнутое подпространство. Пусть Y° в X^* определено формулой

$$Y^\circ = \{ l \in X^* \mid l \restriction Y = 0 \}.$$

Для заданиого ограиничеиного линейного функционала f на X/Y определим $\pi^*(f) \in X^*$, полагая $[\pi^*(f)](x) = f([x])$. Докажите, что π^* — изометрический изоморфизм $(X/Y)^*$ на Y°.

31. (a) Пусть E — баиахово пространство с сепарабельным сопряженным и $\langle M, \mu \rangle$ — такое пространство с мерой, что $L^p(M, d\mu)$ сепарабельио для всех $1 < p < \infty$. Разработайте теорию пространств $L^p(M, d\mu; E)$, аиалогичную теорни $L^2(M, d\mu; \mathscr{H})$, обсуждавшейся в § II.1 н II.4.

(b) Докажите, что $L^p(M \times N, d\mu \otimes d\nu)$ и $L^p(M, d\mu;\ L^p(N, d\nu))$ естествеино изоморфны.

*(c) Пусть E^{**} — сепарабельиое баиахово пространство и $1 \leqslant p < \infty$. Докажите, что $L^p(M, d\mu; E)^*$ естественно изометрически изоморфно $L^q(M, d\mu; E^*)$. (*Указание.* Сначала покажите, что достаточно убедиться в том, что любое ограниченное линейное преобразование T пространства E в $L^q(M, d\mu)$ имеет форму $[T(x)](m) = [f(m)](x)$ с какой-либо $f \in L^q(M, d\mu; E^*)$. Докажите это для частиого случая, когда $E = l_1$. Затем воспользуйтесь задачами 29 и 30 для рассмотрения общего сепарабельного банахова пространства E.)

**32.* Пусть S — замкнутое линейное подпространство в $L^1[0, 1]$. Предположим, что из $f \in S$ следует, что $f \in L^p[0, 1]$ при некотором $p > 1$. Докажите, что тогда $S \subset L^p[0, 1]$ с некоторым $p > 1$.