IV. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Всякий знает, что такое кривая, пока не выучится математике настолько, что вконец запутается в бесчисленных исключениях.

Ф. КЛЕЙН

IV.1. Общие понятия

Абстрактные понятия предела и сходимости—это насущный хлеб функционального анализа. К сожалению, чисто метрических формулировок, которыми мы до сих пор пользовались, оказывается недостаточно, и возникает необходимость в более общих понятиях. Обобщение, называемое топологическим пространством, можно описать на языке только одной сходимости, но в результате получается ужасно неуклюжая конструкция. Вместо этого обычно определяют топологическое пространство, абстрагируя понятие открытых множеств в метрических пространствах. При этом сходимость оказывается вторичным, выводимым понятием. Мы обсудим сходимость в § IV.2.

Этот раздел состоит в основном из определений, так как здесь вводится новый язык, нужный для описания топологических понятий. Мы очень советуем читателю учить его, возвращаясь к этому разделу по мере необходимости, а не просто вызубривать на память.

Определение. **Топологическое пространство** есть множество S с выделенным семейством подмножеств $\mathcal{T}$, которые называются **открытыми множествами** и обладают следующими свойствами:

(i) $\mathcal{T}$ замкнуто относительно конечных пересечений, т. е. если $A, B \in \mathcal{T}$, то $A \cap B \in \mathcal{T}$;

(ii) $\mathcal{T}$ замкнуто относительно *произвольных* объединений, т. е. если $A_\alpha \in \mathcal{T}$ при всех α из некоторого множества индексов I, то $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{T}$;

(iii) $\varnothing \in \mathcal{T}$ и $S \in \mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ называется **топологией** в S. Иногда мы будем обозначать топологическое пространство символом $\langle S, \mathcal{T} \rangle$.

В отличие от борелевой структуры топологические структуры несимметричны по отношению к операциям пересечения и объединения и включают не только счетные операции, но произвольные.

Первейший пример топологического пространства — это метрическое пространство. Открытые множества в нем — это те множества, которые обладают свойством $(\forall x \in M)(\exists r > 0)\{y \mid \rho(x, y) < r\} \subset M$. После обсуждения непрерывных функций мы опишем другое семейство примеров. Упомянем, однако, уже сейчас два тривиальных примера: семейство всех подмножеств данного множества S есть топология; она называется дискретной топологией. $\mathcal{T} = \{\varnothing, S\}$ также есть топология; она называется антидискретной.

Семейство всех топологий на множестве S естественным образом упорядочено: $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$, если $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ в смысле теоретико-множественного включения. Если $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$, то мы говорим, что топология $\mathcal{T}_1$ **слабее** топологии $\mathcal{T}_2$. (Слово «слабее» связано с тем, что в топологии $\mathcal{T}_1$ сходится больше последовательностей, чем в $\mathcal{T}_2$, так что $\mathcal{T}_1$-сходимость — более слабое понятие, чем $\mathcal{T}_2$-сходимость.)

Определение. Семейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ называется **базой** топологии $\mathcal{T}$, если любое $T \subset \mathcal{T}$ имеет вид $T = \bigcup\limits_{\alpha} B_\alpha$ для некоторого семейства $\{B_\alpha\} \subset \mathcal{B}$.

Например, семейство шаров в метрическом пространстве всегда образует базу. Возьмем теперь целый ряд определений непосредственно из теории метрических пространств.

Определение. Множество N называется **окрестностью** точки x топологического пространства S, если существует открытое множество U, такое, что $x \in U \subset N$.

Семейство $\mathcal{N}$ подмножеств топологического пространства S называется **базой окрестностей** точки x, если каждое $N \in \mathcal{N}$ есть окрестность точки x и если для любой заданной окрестности M точки x существует такое $N \in \mathcal{N}$, что $N \subset M$. Иными словами, $\mathcal{N}$ есть база окрестностей точки x тогда и только тогда, когда $\{M \mid N \subset M$ для какой-либо $N \in \mathcal{N}\}$ есть семейство всех окрестностей x. Например, если $\mathcal{B}$ есть база топологии $\mathcal{T}$, то $\{N \in \mathcal{B} \mid x \in N\}$ — база окрестностей точки x. Подчеркнем, что окрестности не обязаны быть открытыми. В метрическом пространстве базы окрестностей образуют *замкнутые* шары положительного радиуса.

Определение. В топологическом пространстве S множество $C \subset S$ называется **замкнутым**, если оно является дополнением открытого множества.

Свойства семейства всех замкнутых множеств выводятся из свойств $\mathcal{T}$.

Определение. Пусть S — топологическое пространство и $A \subset S$. **Замыкание** $\bar{A}$ множества A есть наименьшее замкнутое множество, содержащее A. **Внутренность** A° множества A есть наибольшее открытое множество, содержащееся в A. **Граница** множества A есть множество $\overline{A} \setminus A^\circ \equiv \overline{A} \cap [\overline{S \setminus A}]$.

Существование наименьшего замкнутого множества, содержащего A, следует из замкнутости $\mathcal{T}$ относительно произвольных объединений.

В качестве примеров рассмотрим некоторые топологии в $\mathbb{R}^2$.

Пример 1. Топология обычной метрики, называемая **метрической**.

Пример 2. Рассмотрим семейство множеств вида $\{\langle x, y\rangle \mid x \in O\}$, где *$y$ фиксировано*, а O—открытое множество в обычной топологии в $\mathbb{R}$. Это семейство множеств образует базу топологии, в которой открытыми являются такие множества C, что для всякого $y \in \mathbb{R}$ множество $\{x \mid \langle x, y\rangle \in C\}$ открыто в $\mathbb{R}$ в обычной топологии. В интуитивном смысле, который мы вскоре уточним, эта топология есть «произведение» обычной топологии в одном сомножителе и дискретной топологии во втором.

Пример 3. Пусть $\mathcal{T}$ состоит из пустого множества и всех множеств, содержащих $\langle 0, 0\rangle$. База окрестностей для $\langle x, y\rangle$ в этой топологии есть единственное (!) множество $\{\langle 0, 0\rangle, \langle x, y\rangle\}$.

Опыт обращения с метрическими пространствами подсказывает нам, что и теперь главную роль будут играть непрерывные функции.

Определение. Пусть $\langle S, \mathcal{T}\rangle$ и $\langle T, \mathcal{U}\rangle$—два топологических пространства. Функция $f\colon S \to T$ называется **непрерывной**, если $f^{-1}[A] \in \mathcal{T}$ при каждом $A \in \mathcal{U}$, т. е. если прообраз любого открытого множества есть открытое множество. Функция f называется **открытой**, если $f[B]$ открыто для любого $B \in \mathcal{T}$. Если f открыта и непрерывна, она называется **взаимно непрерывной**. Взаимно непрерывная биекция называется **гомеоморфизмом**.

Гомеоморфизмы—это изоморфизмы топологических пространств. Топологическое понятие—это такое понятие (или объект), которое инвариантно относительно гомеоморфизма. Так, например, интервалы $(-\infty, \infty)$ и $(-1, 1)$ гомеоморфны относительно гомеоморфизма $x \mapsto x/(1+x^2)$. Они отнюдь не изометричны в обычной метрике, и только один из них полон. Это показывает, что полнота не есть топологическое понятие. Однако большая часть метрических понятий, полезных в анализе, являются топологическими понятиями.

Для задания топологии часто пользуются непрерывностью.

Определение. Пусть $\mathcal{K}$—семейство функций из некоторого множества S в топологическое пространство $\langle T, \mathcal{U}\rangle$. Тогда

$\mathcal{K}$**-слабая** (или просто **слабая**) топология на S есть слабейшая топология, в которой все функции $f \in \mathcal{K}$ непрерывны.

Чтобы построить $\mathcal{K}$-слабую топологию, возьмем семейство всех конечных пересечений множеств вида $f^{-1}[U]$, где $f \in \mathcal{K}$ и $U \in \mathcal{U}$. Эти множества образуют базу $\mathcal{K}$-слабой топологии. Если $\mathcal{K}$ есть семейство функций на S со значениями в разных топологических пространствах, то $\mathcal{K}$-слабая топология определяется очевидным образом.

Пример 4. Рассмотрим множество $C[a, b]$ непрерывных функций на $[a, b]$. **Топология поточечной сходимости** на $C[a, b]$ есть слабая топология, задаваемая семейством функций $f \mapsto f(x)$. Именно, для каждой точки $x \in [a, b]$ положим $E_x(f) = f(x)$, так что $E_x(\cdot)$ суть отображения множества $C[a, b]$ в $\mathbb{R}$. Как мы убедимся ниже, топология поточечной сходимости есть такая топология на $C[a, b]$, в которой $f_n \longrightarrow f$ тогда и только тогда, когда $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ при каждом x.

Пример 5. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство. В этом случае слабая топология — это слабейшая топология, в которой $\varphi \mapsto (\psi, \varphi)_{\mathcal{H}}$ становится непрерывным при каждом ψ из $\mathcal{H}$. База окрестностей нуля в явном виде задается множествами

$$N(\psi_1, \ldots, \psi_n; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \{\varphi \mid |(\psi_i, \varphi)| < \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, n\},$$

где $\varepsilon_i > 0$, $\psi_1, \ldots, \psi_n$ произвольны и $n = 1, 2, \ldots$. Значит, окрестности в слабой топологии суть цилиндры во всех, кроме конечного числа, измерениях, т. е. существует подпространство M (ортогональное дополнение к $\psi_1, \ldots, \psi_n$), дополнение которого $M^\perp$ конечномерно и таково, что из $\varphi \in N$, $\eta \in M$ следует $\varphi + \eta \in N$.

Пример 6. Рассмотрим такие отображения π_1, π_2 на $\mathbb{R}^2$, что $\pi_1(x, y) = x$, $\pi_2(x, y) = y$. Слабая топология, определяемая функциями π_1 и π_2, и обычная топология на $\mathbb{R}^2$ в качестве базы соответствующих открытых множеств имеют прямоугольники $(a, b) \times (c, d)$, и, значит, эта слабая топология есть «обычная» топология на $\mathbb{R}^2$.

Пример 7. С помощью слабой топологии можно топологизировать декартовы произведения. Напомним, что если $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — некоторое семейство множеств, то $S = \underset{\alpha \in I}{\times} S_\alpha$ есть семейство всех $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$, где $x_\alpha \in S_\alpha$. Для каждого α определено отображение $\pi_\alpha\colon S \longrightarrow S_\alpha$, именно $\pi_\alpha(\{x_\beta\}_{\beta \in I}) = x_\alpha$. Если каждое S_α наделено топологией $\mathcal{T}_\alpha$, то мы определим **топологию произведения** $\underset{\alpha \in I}{\times} \mathcal{T}_\alpha$ как слабую топологию, порождаемую проекциями π_α.

Вернемся теперь к определениям и приведем классификацию пространств по тому признаку, насколько хорошо открытые множества разделяют точки и замкнутые множества.

Определение.

(a) Топологическое пространство называется **T_1-пространством**, если для всех x и y, $x \neq y$, существует открытое множество O, такое, что $y \in O$, $x \notin O$. Иными словами, пространство относится к типу T_1 в том и только том случае, когда $\{x\}$ замкнуто для любого x.

(b) Топологическое пространство называется **хаусдорфовым** (или T_2-пространством), если для любых x и y, $x \neq y$, существуют открытые множества O_1, O_2, такие, что $x \in O_1$, $y \in O_2$ и $O_1 \cap O_2 = \varnothing$.

(c) Топологическое пространство называется **регулярным** (или T_3-пространством), если оно типа T_1 и для всех x и всех замкнутых C, таких, что $x \notin C$, существуют открытые множества O_1, O_2, такие, что $x \in O_1$, $C \subset O_2$ и $O_1 \cap O_2 = \varnothing$. Это равносильно тому, что замкнутые окрестности любой точки образуют базу окрестностей.

(d) Топологическое пространство называется **нормальным** (или T_4-пространством), если оно типа T_1 и для всех замкнутых C_1, C_2, таких, что $C_1 \cap C_2 = \varnothing$, существуют открытые множества O_1, O_2, такие, что $C_1 \subset O_1$, $C_2 \subset O_2$ и $O_1 \cap O_2 = \varnothing$.

Имеет место очевидное

Предложение. $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$.

Отметим, что наиболее важны понятия хаусдорфова и нормального пространства. Мы не станем пока обсуждать другой способ разделения множеств при помощи непрерывных функций. К этому вопросу относится лемма Урысона (теорема IV.7).

Рассмотрим теперь различные критерии счетности.

Определение.

(i) Топологическое пространство S **сепарабельно**, если оно имеет счетное плотное множество.

(ii) Говорят, что топологическое пространство S удовлетворяет **первой аксиоме счетности**, если всякая точка $x \in S$ имеет счетную базу окрестностей.

(iii) Говорят, что топологическое пространство S удовлетворяет **второй аксиоме счетности**, если S имеет счетную базу топологии.

Связь между этими топологическими понятиями и свойствами метрических пространств устанавливается в следующем элементарном предложении.

Предложение. (a) Всякое метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

(b) Метрическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности тогда и только тогда, когда оно сепарабельно.

(c) Всякое топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, сепарабельно.

Предостережение. Существуют сепарабельные пространства, не удовлетворяющие второй аксиоме счетности (см. задачу 7). Чтобы вконец запутать все дело, некоторые авторы под сепарабельностью понимают выполнение второй аксиомы счетности. *У нас всегда сепарабельность означает существование счётного плотного множества.*

Геометрическая идея связности имеет свою топологическую формулировку:

Определение. Топологическое пространство S называется **несвязным**, если оно содержит непустое собственное подмножество C, которое одновременно открыто и замкнуто. Эквивалентная формулировка: S несвязно, если оно может быть представлено как объединение двух непересекающихся непустых замкнутых множеств. Если S не является несвязным, оно называется **связным**.

Мы разберем понятие связности в задачах 3 и 6. Наконец, рассмотрим еще одно топологическое понятие—сужение топологии на подмножество.

Определение. Пусть $\langle S, \mathcal{T}\rangle$—топологическое пространство, и пусть $A \subset S$. **Индуцированная (относительная) топология** на A есть семейство множеств $\mathcal{T}_A = \{O \cap A \mid O \in \mathcal{T}\}$. Подмножество $B \subset A$ называется **открытым в индуцированной топологии**, если $B \in \mathcal{T}_A$, **и замкнутым в индуцированной топологии**, если $A \setminus B \in \mathcal{T}_A$.

IV.2. Направленности и сходимость

В этом разделе мы рассмотрим новый объект, называемый направленностью, который нужен для того, чтобы оперировать предельными переходами в общих топологических пространствах. Хотя, на первый взгляд, понятие направленности кажется весьма замысловатым, предложения этого раздела покажут, насколько оно на самом деле естественно.

Определение. **Направленное множество** есть множество индексов I с упорядочением $<$, удовлетворяющим следующим требованиям:

(i) если α, $\beta \in I$, то существует такое $\gamma \in I$, что $\gamma > \alpha$ и $\gamma > \beta$;
(ii) $<$ есть частичное упорядочение.