Предложение. (a) Всякое метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

(b) Метрическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности тогда и только тогда, когда оно сепарабельно.

(c) Всякое топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, сепарабельно.

Предостережение. Существуют сепарабельные пространства, не удовлетворяющие второй аксиоме счетности (см. задачу 7). Чтобы вконец запутать все дело, некоторые авторы под сепарабельностью понимают выполнение второй аксиомы счетности. *У нас всегда сепарабельность означает существование счётного плотного множества.*

Геометрическая идея связности имеет свою топологическую формулировку:

Определение. Топологическое пространство S называется **несвязным**, если оно содержит непустое собственное подмножество C, которое одновременно открыто и замкнуто. Эквивалентная формулировка: S несвязно, если оно может быть представлено как объединение двух непересекающихся непустых замкнутых множеств. Если S не является несвязным, оно называется **связным**.

Мы разберем понятие связности в задачах 3 и 6. Наконец, рассмотрим еще одно топологическое понятие—сужение топологии на подмножество.

Определение. Пусть $\langle S, \mathcal{T}\rangle$—топологическое пространство, и пусть $A \subset S$. **Индуцированная (относительная) топология** на A есть семейство множеств $\mathcal{T}_A = \{O \cap A \mid O \in \mathcal{T}\}$. Подмножество $B \subset A$ называется **открытым в индуцированной топологии**, если $B \in \mathcal{T}_A$, **и замкнутым в индуцированной топологии**, если $A \setminus B \in \mathcal{T}_A$.

IV.2. Направленности и сходимость

В этом разделе мы рассмотрим новый объект, называемый направленностью, который нужен для того, чтобы оперировать предельными переходами в общих топологических пространствах. Хотя, на первый взгляд, понятие направленности кажется весьма замысловатым, предложения этого раздела покажут, насколько оно на самом деле естественно.

Определение. **Направленное множество** есть множество индексов I с упорядочением $<$, удовлетворяющим следующим требованиям:

(i) если α, $\beta \in I$, то существует такое $\gamma \in I$, что $\gamma > \alpha$ и $\gamma > \beta$;
(ii) $<$ есть частичное упорядочение.

Определение. **Направленность** в топологическом пространстве S есть отображение из направленного множества I в S; будем обозначать ее символом $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Если в качестве направленного множества мы возьмем натуральные числа в естественном порядке, то направленностями будут просто последовательности в S, так что направленность есть обобщение понятия последовательности. Если $P(\alpha)$ — предложение, зависящее от индекса α из направленного множества I, то мы говорим, что $P(\alpha)$ **в конце концов истинно**, если в I существует такое β, что $P(\alpha)$ истинно при $\alpha > \beta$. Мы говорим, что $P(\alpha)$ **часто истинно**, если относительно него нельзя утверждать, что оно в конце концов ложно, т. е. если при любом β существует такое $\alpha > \beta$, что $P(\alpha)$ истинно.

Определение. Говорят, что направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ в топологическом пространстве S **сходится** к точке $x \in S$ (и пишут $x_\alpha \to x$), если для любой окрестности N точки x существует такое $\beta \in I$, что $x_\alpha \in N$, коль скоро $\alpha > \beta$.

Итак, $x_\alpha \to x$ тогда и только тогда, когда x_α в конце концов попадает в любую окрестность x. Если x_α часто попадает в любую окрестность x, то x называют **точкой накопления**, или **обобщенной предельной точкой** направленности $\{x_\alpha\}$. Заметим, что понятия предела и точки накопления обобщают те же понятия для последовательности в метрическом пространстве.

Теорема IV.1. Пусть A — множество в топологическом пространстве S. Тогда точка x принадлежит замыканию A в том и лишь в том случае, если существует такая направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$, что $x_\alpha \in A$ и $x_\alpha \to x$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что $\bar{A}$ есть как раз такое множество точек x, что каждая окрестность x содержит точку из A. Это множество заведомо содержит A, и его дополнение есть наибольшее открытое множество, не содержащее ни одной точки из A. Допустим далее, что $x_\alpha \to x$, причем каждое $x_\alpha \in A$. Тогда каждая окрестность точки x содержит какие-либо x_α и, значит, какие-либо точки из A, т. е. x есть предельная точка A и, таким образом, $x \in \bar{A}$.

Обратно, допустим, что $x \in \bar{A}$. Пусть I — система окрестностей x с упорядочением $N_1 < N_2$, если $N_2 \subset N_1$. Для каждого $N \in I$ пусть x_N — точка, принадлежащая $A \cap N$. Тогда $\{x_N\}_{N \in I}$ есть направленность и $x_N \to x$. ∎

В пространствах, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, можно строить замыкания множеств, пользуясь лишь последовательностями. Таково положение в метрических пространствах.

На следующем примере мы убедимся, что в более общем случае одними последовательностями не обойтись.

Пример. Пусть $S=[0, 1]$, и пусть непустыми открытыми множествами будут те подмножества отрезка $[0, 1]$, дополнения которых содержат не более чем счетное множество точек. Пусть $A=[0, 1)$. Тогда $\bar{A}=S$, так как $\{1\}$ — не открытое множество. Пусть теперь $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — любая последовательность точек из $[0, 1)$. Она не может сходиться к 1, так как дополнение к $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть открытое множество, содержащее 1.

Хотя этот пример кажется искусственным, но пространства, не удовлетворяющие первой аксиоме счетности, играют важную роль в функциональном анализе. Обычно они появляются, когда рассматривают сопряженные банаховых пространств с топологией, более слабой, чем определяемая нормой (§ IV.5).

Сформулируем два результата о направленностях, доказательства которых не трудны, и мы их оставим в качестве задач:

Теорема IV.2. (а) Функция f из топологического пространства S в топологическое пространство T непрерывна в том и только в том случае, если для любой сходящейся направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ в S, такой, что $x_\alpha \to x$, направленность $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ сходится в T к $f(x)$.

(b) Пусть S — хаусдорфово пространство. Тогда направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ в S имеет не более чем один предел, т. е. если $x_\alpha \to x$ и $x_\alpha \to y$, то $x=y$.

Понятие, аналогичное подпоследовательности, можно ввести следующим образом:

Определение. Направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ называется **поднаправленностью** направленности $\{y_\beta\}_{\beta\in J}$, если существует функция F: $I \to J$ с такими свойствами:

(i) $x_\alpha = y_{F(\alpha)}$ для каждого $\alpha\in I$;

(ii) для всякого $\beta'\in J$ существует такое $\alpha'\in I$, что из $\alpha>\alpha'$ следует $F(\alpha)>\beta'$ (т. е. $F(\alpha)$ в конце концов больше любого фиксированного $\beta\in J$).

Следующее простое предложение показывает, что приведенное определение разумно:

Предложение. Точка x в топологическом пространстве S есть точка накопления направленности $\{x_\alpha\}$ тогда и только тогда, когда какая-либо поднаправленность направленности $\{x_\alpha\}$ сходится к x.

Разумеется, подпоследовательности суть поднаправленности последовательностей. Однако может случиться, что последовательность в топологическом пространстве не имеет сходящихся подпоследовательностей, но имеет сходящиеся поднаправленности (см. задачу 12).

IV.3. Компактность

Читатель, несомненно, помнит, какую роль в элементарном анализе играют замкнутые ограниченные подмножества $\mathbb{R}^n$. В этом разделе мы рассмотрим топологическую абстракцию этого понятия.

Определение. Говорят, что топологическое пространство $\langle S, \mathcal{T}\rangle$ **компактно**, если любое открытое покрытие S имеет конечное подпокрытие, т. е. если для любого семейства $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$, такого, что $S = \bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U$, существует конечное подмножество $\{U_1, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{U}$ со свойством $S = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$. Подмножество в топологическом пространстве называется **компактным множеством**, если оно является компактным пространством в относительной топологии.

Всюду далее мы всегда будем считать, что все компактные пространства хаусдорфовы, хотя время от времени будем специально напоминать об этом условии.

Поскольку нам предстоит изложить довольно обширный материал, полезно, пожалуй, коротко сказать о содержании двух следующих разделов. После рассмотрения некоторых эквивалентных формулировок свойства компактности и кое-каких элементарных свойств компактных пространств мы обратимся к нескольким центральным столпам функционального анализа. Сначала сформулируем и обсудим теорему Тихонова. Потом перейдем к изучению непрерывных функций на компактных множествах. Убедившись, что компактное хаусдорфово пространство X обладает богатым запасом непрерывных функций (лемма Урысона), мы исследуем банахово пространство $C(X)$ непрерывных функций на X. Мы сформулируем теорему Стоуна — Вейерштрасса, а ее весьма поучительное доказательство дадим в дополнении к этому разделу. В следующем разделе будет определено сопряженное к $C(X)$ пространство. С помощью теоремы Рисса — Маркова мы докажем, что $C(X)^*$ совпадает с $\mathcal{M}(X)$ — семейством не знакоопределенных мер на X.

Сначала сформулируем по-другому определение компактности, взяв дополнения к открытым множествам.

Определение. Говорят, что топологическое пространство S обладает **свойством центрированности**, если любое семейство $\mathcal{F}$