тельность в топологическом пространстве не имеет сходящихся подпоследовательностей, но имеет сходящиеся поднаправленности (см. задачу 12).

IV.3. Компактность

Читатель, несомненно, помнит, какую роль в элементарном анализе играют замкнутые ограниченные подмножества $\mathbb{R}^n$. В этом разделе мы рассмотрим топологическую абстракцию этого понятия.

Определение. Говорят, что топологическое пространство $\langle S, \mathcal{T}\rangle$ **компактно**, если любое открытое покрытие S имеет конечное подпокрытие, т. е. если для любого семейства $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$, такого, что $S = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$, существует конечное подмножество $\{U_1, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{U}$ со свойством $S = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Подмножество в топологическом пространстве называется **компактным множеством**, если оно является компактным пространством в относительной топологии.

Всюду далее мы всегда будем считать, что все компактные пространства хаусдорфовы, хотя время от времени будем специально напоминать об этом условии.

Поскольку нам предстоит изложить довольно обширный материал, полезно, пожалуй, коротко сказать о содержании двух следующих разделов. После рассмотрения некоторых эквивалентных формулировок свойства компактности и кое-каких элементарных свойств компактных пространств мы обратимся к нескольким центральным столпам функционального анализа. Сначала сформулируем и обсудим теорему Тихонова. Потом перейдем к изучению непрерывных функций на компактных множествах. Убедившись, что компактное хаусдорфово пространство X обладает богатым запасом непрерывных функций (лемма Урысона), мы исследуем банахово пространство $C(X)$ непрерывных функций на X. Мы сформулируем теорему Стоуна—Вейерштрасса, а ее весьма поучительное доказательство дадим в дополнении к этому разделу. В следующем разделе будет определено сопряженное к $C(X)$ пространство. С помощью теоремы Рисса—Маркова мы докажем, что $C(X)^*$ совпадает с $\mathcal{M}(X)$—семейством не знакоопределенных мер на X.

Сначала сформулируем по-другому определение компактности, взяв дополнения к открытым множествам.

Определение. Говорят, что топологическое пространство S обладает **свойством центрированности**, если любое семейство $\mathcal{F}$

замкнутых множеств в S, такое, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i \neq \varnothing$ для любого конечного подсемейства $\{F_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{F}$, удовлетворяет условию $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} F \neq \varnothing$.

Предложение (критерий центрированности). S компактно тогда и только тогда, когда S обладает свойством центрированности.

Доказательство. Пусть задано $\mathcal{F}$, и пусть $\mathcal{U} = \{S \setminus F \mid F \in \mathcal{F}\}$. Тогда $\mathcal{F}$ обладает свойством $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i \neq \varnothing$ в том и только том случае, когда $\mathcal{U}$ не имеет конечного подпокрытия, и свойством $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} F \neq \varnothing$ в том и только том случае, когда $\mathcal{U}$ не есть покрытие. Читателю предлагается пробраться через это двойное отрицание и завершить доказательство. ▌

Несколько более глубокая эквивалентная формулировка такова:

Теорема IV.3 (теорема Больцано—Вейерштрасса). Пространство S компактно тогда и только тогда, когда каждая направленность в S имеет сходящуюся поднаправленность.

Доказательство. Предположим, что каждая направленность имеет сходящуюся поднаправленность, и пусть $\mathcal{U}$—открытое покрытие. Допустим, что $\mathcal{U}$ не имеет конечного подпокрытия, и придем к противоречию. Упорядочим конечные подсемейства $\mathfrak{S}$ семейства $\mathcal{U}$ по включению. Тогда $\mathfrak{S}$ будет направленным множеством. Для всякого $\mathcal{F} \equiv \{F_1, \ldots, F_m\} \in \mathfrak{S}$ выберем $x_{\mathcal{F}} \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m} F_i$. Согласно допущению, направленность $\{x_{\mathcal{F}}\}$ имеет точку накопления x. Так как $\mathcal{U}$ есть покрытие, мы можем найти то $U \in \mathcal{U}$, для которого $x \in U$. Поскольку $x_{\mathcal{F}}$ часто лежит в U, можно найти конечное подсемейство $\mathcal{G} \in \mathfrak{S}$, такое, что $\{U\} \prec \mathcal{G}$ и $x_{\mathcal{G}} \in U$. Так как $\{U\} \prec \mathcal{G}$, то $U \subset \bigcup\limits_{G \in \mathcal{G}} G$; значит, $x_{\mathcal{G}} \in \bigcup\limits_{G \in \mathcal{G}} G$, и мы пришли к противоречию.

Предположим теперь, что S компактно, и пусть $\{y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — направленность. Если $\{y_\alpha\}$ не имеет точек накопления, то для любой $x \in S$ существуют открытое множество U_x, содержащее x, и такое $\alpha_x \in I$, что $y_\alpha \notin U_x$ при $\alpha > \alpha_x$. Семейство $\{U_x \mid x \in S\}$ есть открытое покрытие S, так что можно найти такие $x_1, \ldots, x_n$, что $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i} = S$. Так как I направлено, можно найти $\alpha_0 > \alpha_{x_i}$ при $i = 1, \ldots, n$. Но $y_{\alpha_0} \notin U_{x_i}$ при $i = 1, \ldots, n$, что невозможно, так как $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i} = S$. Это противоречие показывает, что $\{y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ обладает точкой накопления и, значит, есть сходящаяся поднаправленность. ∎

Пространства, удовлетворяющие первой аксиоме счетности, компактны тогда и только тогда, когда всякая последовательность в них содержит сходящуюся подпоследовательность (это легко показать, рассуждая по образцу предыдущего доказательства).

Пример 1. Единичный шар в l_2 не компактен в *метрической топологии*. Ни одна подпоследовательность последовательности ортонормированных элементов не может сходиться.

Пример 2. Пусть $S=\{\{a_n\}\in l_2 \mid |a_n|\leqslant 1/n\}$. Легко видеть, что последовательность элементов из S сходится в том и только том случае, если сходится каждая компонента. Пользуясь диагональным методом, заключаем, что всякая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность. Таким образом, в силу теоремы Больцано—Вейерштрасса, S компактно.

Предостережение. В общем банаховом пространстве компактность—не то же самое, что замкнутость и ограниченность. В самом деле, единичный шар в банаховом пространстве компактен (в топологии нормы) тогда и только тогда, когда это пространство конечномерно (см. задачу 4 гл. V).

Отметим два простых свойства компактных пространств, которые «передаются по наследству» (см. задачу 38):

Предложение. (a) Замкнутое подмножество компактного пространства компактно в относительной топологии.

(b) Непрерывный образ компактного пространства компактен.

Следствие. Любая непрерывная функция на компактном пространстве C принимает максимальное и минимальное значения. Это означает, что существуют такие $x_{\pm}$, что

$$f(x_+)=\sup_{x\in C} f(x) \quad \text{и} \quad f(x_-)=\inf_{x\in C} f(x).$$

Часто бывает полезной такая

Теорема IV.4. Пусть S и T—компактные хаусдорфовы пространства, и пусть $f\colon S\longrightarrow T$—непрерывная биекция. Тогда f—гомеоморфизм.

Для доказательства нам потребуется следующая

Лемма. Если T хаусдорфово, а $S\subset T$ компактно, то S замкнуто.

Доказательство. Пусть $x\in\overline{S}$. Можно найти такую направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ в S, что $x_\alpha\longrightarrow x$. Так как в хаусдорфовых пространствах предел единствен, то x—единственная точка накопления этой направленности. Но, поскольку S компактно, данная направленность имеет точку накопления в S. Значит, $x \in S$ и, следовательно, $\bar{S}=S$. ▮

Доказательство теоремы IV.4. Осталось только доказать, что f открыто, или (что то же самое, поскольку f—биекция) что $f[C]$ замкнуто, если замкнуто C. Но если $C \subset S$ замкнуто, то C компактно. В силу приведенного выше предложения $f[C]$ также компактно. Теперь результат прямо следует из леммы. ▮

Предложение. Если $\{A_i\}_{i=1}^n$—семейство компактных множеств, то произведение $\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n} A_i$ компактно в топологии произведения.

Доказательство. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$—направленность в $A=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n} A_i$, причем $x_\alpha=\langle x_\alpha^1, x_\alpha^2, \ldots, x_\alpha^n\rangle$. Поскольку A_1 компактно, можно найти такую поднаправленность $\{x_{\alpha(i)}\}_{i \in D_1}$, что $\{x^1_{\alpha(i)}\}$ сходится к $x_1 \in A_1$. С помощью конечной индукции можно найти такую поднаправленность $\{x_{\alpha(i)}\}_{i \in D_n}$, что $\{x^j_{\alpha(i)}\}$ сходится к $x_j \in A_j$ для каждого j. Значит, $\{x_{\alpha(i)}\}$ сходится в A к $x=\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ и, следовательно, по критерию Больцано—Вейерштрасса A компактно. ▮

Это не очень глубокое предложение, но глубокий факт состоит в том, что оно остается справедливым и для произвольного произведения компактных пространств.

Теорема IV.5 (теорема Тихонова). Пусть $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$—семейство компактных пространств. Тогда $\mathop{\mathsf{X}}\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ компактно в топологии произведения (т. е. в слабой топологии).

Поскольку доказательство этой теоремы довольно сложно и хорошо излагается в учебной литературе, мы отошлем читателя к книгам, которые перечислены в Замечаниях. Однако сделаем и здесь несколько замечаний. Прежде всего отметим, что именно эта теорема подкрепляет ощущение, что слабая топология—это «естественная» топология для $\mathop{\mathsf{X}}\limits_{\alpha} A_\alpha$. Другой априорный кандидат—«ящичная топология», порождаемая множествами вида $\mathop{\mathsf{X}}\limits_{\alpha} U_\alpha$, где каждое U_α открыто в A_α. Но в этой топологии теорема Тихонова не имеет места. Во-вторых, заметим, что эта теорема существенно опирается на аксиому выбора (лемму Цорна). На самом деле известно, что в теории множеств лемма Цорна следует из теоремы Тихонова. Наконец, отметим, что в частном случае счетного числа *метрических* пространств теорему IV.5

можно доказать тем же способом, что и предыдущее предложение, с привлечением диагонального метода, описанного в § I.5.

Займемся теперь функциями на компактных хаусдорфовых пространствах. Покажем сначала, что компактные хаусдорфовы пространства обладают сильными свойствами отделимости в том смысле, что замкнутые множества в них разделяются открытыми. Затем мы воспользуемся этими свойствами отделимости, чтобы построить непрерывные функции.

Теорема IV.6. Любое компактное хаусдорфово пространство X нормально (типа T_4).

Доказательство. Сначала докажем, что X регулярно (типа T_3). Пусть $p \in X$, и пусть $C \subset X$ замкнуто, причем $p \notin C$. Поскольку X хаусдорфово, при любом $y \in C$ можно найти открытые и непересекающиеся множества U_y и V_y, такие, что $y \in U_y$ и $p \in V_y$. Множества $\{U_y\}_{y \in C}$ покрывают C, которое компактно. Значит, $U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}$ покрывают C. Пусть $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$; $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Эти U и V открыты и не пересекаются, причем $C \subset U$ и $p \in V$. Это показывает, что X регулярно.

Пусть теперь C, D замкнуты и не пересекаются. Заменяя в предыдущем рассуждении p на D и слова «так как X хаусдорфово» на «так как X регулярно», мы докажем, что X нормально. ∎

Нормальные пространства в силу леммы Урысона всегда обладают богатым запасом непрерывных функций.

Теорема IV.7 (лемма Урысона). Пусть C и D — замкнутые непересекающиеся множества в нормальном пространстве X. Тогда существует непрерывная функция $f(x)$ из X в $\mathbb{R}$, удовлетворяющая таким условиям: $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ при всех x; $f(x) = 0$, когда $x \in C$, и $f(x) = 1$, когда $x \in D$.

Набросок доказательства. Пользуясь нормальностью X, строим по индукции для каждого диадического рационального числа r (т. е. $r = k/2^n$; k, n — целые, $0 \leqslant k \leqslant 2^n$) открытое множество U_r, такое, что $C \subset U_r \subset \overline{U}_r \subset U_s \subset \overline{U}_s \subset X \setminus D$, если $r < s$. Далее с помощью U_r определяем такую функцию f, что $f(x) < r$ тогда и только тогда, когда $x \in U_r$. Можно показать, что f непрерывна. Подробности см. в литературе, цитированной в Замечаниях. ∎

Ниже мы убедимся, что можно доказать и более сильные результаты, относящиеся к теории функций (теорема IV.11).

В качестве последнего результата об общих свойствах функций на X мы докажем, что определенные семейства функций плотны в $C_{\mathbb{R}}(X)$ — семействе всех непрерывных вещественнозначных функций на X. Сначала отметим, что наше доказательство в § I.5 для $C[a, b]$ проходит и для любого компактного множества.

Теорема IV.8. Пусть $C(X)$—семейство всех непрерывных комплекснозначных функций на компактном хаусдорфовом пространстве X, снабженное нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$. Пусть $C_{\mathbb{R}}(X) = \{f \in C(X) \mid f$ вещественнозначна$\}$. Тогда $C(X)$ есть комплексное банахово пространство, а $C_{\mathbb{R}}(X)$—вещественное банахово пространство.

Теорема о плотном семействе, которую мы сформулируем, обобщает классическую теорему Вейерштрасса, утверждающую, что любая непрерывная вещественнозначная функция на интервале $[0, 1]$ есть равномерный (на $[0, 1]$) предел полиномов (см. задачи 19 и 20). Заметим, что в $C_{\mathbb{R}}(X)$ определено естественное умножение $(fg)(x) = f(x)g(x)$. **Подалгебра** в $C_{\mathbb{R}}(X)$ есть подпространство, замкнутое относительно умножения.

Теорема IV.9 (теорема Стоуна—Вейерштрасса). Пусть B—подалгебра в $C_{\mathbb{R}}(X)$, замкнутая по норме $\|\cdot\|_\infty$. Мы говорим, что алгебра B разделяет точки, если для любых данных $x, y \in X$ можно найти такую $f \in B$, что $f(x) \neq f(y)$. Если B разделяет точки, то либо $B = C_{\mathbb{R}}(X)$, либо $B = \{f \in C_{\mathbb{R}}(X) \mid f(x_0) = 0\}$ при некотором $x_0 \in X$. Если $1 \in B$ и B разделяет точки, то $B = C_{\mathbb{R}}(X)$.

Поучительное доказательство этой теоремы, основанное на теории решеток, мы отнесем в дополнение к этому разделу.

То, что мы имеем дело с $C_{\mathbb{R}}(X)$, а не с $C(X)$, имеет решающее значение (см. задачу 15); однако, добавив еще одно предположение, легко распространить теорему IV.9 на комплексный случай.

Теорема IV.10 (теорема Стоуна—Вейерштрасса для комплексного случая). Пусть B—подалгебра в $C(X)$, обладающая тем свойством, что если $f \in B$, то и комплексно сопряженная функция $\bar{f} \in B$. Если B замкнута и разделяет точки, то $B = C(X)$ или $B = \{f \mid f(x) = 0\}$ для некоторого фиксированного x.

Дополнительное условие о комплексно сопряженной функции играет решающую роль. Пусть, например, D—замкнутый единичный круг в комплексной плоскости. Функции, аналитические внутри D и непрерывные на всем D, составляют замкнутую подалгебру на D, содержащую единицу и разделяющую точки, но отличную от $C(D)$. Однако она не замкнута относительно комплексного сопряжения.

Как пример применения теоремы Стоуна—Вейерштрасса, а также как иллюстрацию того, в сколь мощную силу могут складываться разные теоремы функционального анализа, мы докажем одну теорему о продолжении для функций из $C(Y)$, когда

$Y \subset X$, причем X компактно, а Y замкнуто. Фактически теорема верна и тогда, когда X только нормально (задача 18).

Теорема IV.11 (теорема Титце о продолжении). Пусть X — компактное пространство, и пусть $Y \subset X$ замкнуто. Пусть f — любая вещественнозначная функция на Y. Тогда существует такая $\tilde{f} \in C_{\mathbf{R}}(X)$, что $f(y) = \tilde{f}(y)$ для всех $y \in Y$.

Доказательство. Рассмотрим отображение ρ: $C_{\mathbf{R}}(X) \to C_{\mathbf{R}}(Y)$, заданное формулой $\rho(f) = f \restriction Y$. Теорема равносильна утверждению, что ρ сюръективно. Очевидно, что $\operatorname{Ran}\rho$ есть подалгебра в $C_{\mathbf{R}}(Y)$ и $1 \in \operatorname{Ran}\rho$. Более того, по лемме Урысона $\operatorname{Ran}\rho$ разделяет точки. Если удастся показать, что $\operatorname{Ran}\rho$ замкнута по норме $\|\cdot\|_{C(Y)}$, то мы сможем завершить доказательство, воспользовавшись теоремой Стоуна — Вейерштрасса.

Пусть $I = \operatorname{Ker}\rho$. Тогда I замкнуто в $C_{\mathbf{R}}(X)$, так что мы можем построить банахово факторпространство $C_{\mathbf{R}}(X)/I$. При помощи элементарных алгебраических операций ρ «поднимается» до биекции $\tilde{\rho}$: $C_{\mathbf{R}}(X)/I \to \operatorname{Ran}\rho$. Если бы можно было теперь показать, что $\|\tilde{\rho}([f])\|_{C_{\mathbf{R}}(Y)} = \|[f]\|_{C_{\mathbf{R}}(X)/I}$, то $\operatorname{Ran}\rho$ будет банаховым пространством и, следовательно, замкнутой подалгеброй.

Ясно, что $\|\rho(f)\|_{C_{\mathbf{R}}(Y)} \leqslant \|f\|_{C_{\mathbf{R}}(X)}$, поэтому $\|\tilde{\rho}([f])\|_{C_{\mathbf{R}}(Y)} \leqslant \leqslant \|[f]\|_{C_{\mathbf{R}}(X)/I}$. Значит, достаточно показать, что при заданном $g \in \operatorname{Ran}\rho$ мы можем найти такое $f \in C_{\mathbf{R}}(X)$, что $g = \rho(f)$ и $\|g\|_{C_{\mathbf{R}}(Y)} = \|f\|_{C_{\mathbf{R}}(X)}$ (вспомните определение факторнормы!). Так как $g \in \operatorname{Ran}\rho$, то $g = \rho(h_1)$ для некоторого $h_1 \in C_{\mathbf{R}}(X)$. Положим

$$h_2 = \min\{\|g\|_{C_{\mathbf{R}}(Y)}, h_1\};$$

тогда $\rho(h_2) = g$ и $h_2(x) \leqslant \|g\|_{C_{\mathbf{R}}(Y)}$ при всех x. Пусть $h_3 = \max\{-\|g\|_{C_{\mathbf{R}}(X)}, h_2\}$. Тогда $\|h_3\|_{C_{\mathbf{R}}(X)} = \|g\|_{C_{\mathbf{R}}(Y)}$ и $\rho(h_3) = g$. Это завершает доказательство. ∎

Дополнение к § IV.3. Теорема Стоуна — Вейерштрасса

В этом дополнении мы докажем теорему IV.9 для случая, когда $1 \in B$. Общее доказательство мы оставим в качестве самостоятельного упражнения. Любопытно заметить, что первым шагом будет доказательство классической теоремы Вейерштрасса (которая является частным случаем общей теоремы!).

Лемма 1. Множество всех полиномов плотно в $C_{\mathbf{R}}[a, b]$ при любых конечных вещественных a, b.