$Y \subset X$, причем X компактно, а Y замкнуто. Фактически теорема верна и тогда, когда X только нормально (задача 18).

Теорема IV.11 (теорема Титце о продолжении). Пусть X — компактное пространство, и пусть $Y \subset X$ замкнуто. Пусть f — любая вещественнозначная функция на Y. Тогда существует такая $\tilde{f} \in C_{\mathbf{R}}(X)$, что $f(y) = \tilde{f}(y)$ для всех $y \in Y$.

Доказательство. Рассмотрим отображение ρ: $C_{\mathbf{R}}(X) \to C_{\mathbf{R}}(Y)$, заданное формулой $\rho(f) = f \restriction Y$. Теорема равносильна утверждению, что ρ сюръективно. Очевидно, что $\operatorname{Ran}\rho$ есть подалгебра в $C_{\mathbf{R}}(Y)$ и $1 \in \operatorname{Ran}\rho$. Более того, по лемме Урысона $\operatorname{Ran}\rho$ разделяет точки. Если удастся показать, что $\operatorname{Ran}\rho$ замкнута по норме $\|\cdot\|_{C(Y)}$, то мы сможем завершить доказательство, воспользовавшись теоремой Стоуна — Вейерштрасса.

Пусть $I = \operatorname{Ker}\rho$. Тогда I замкнуто в $C_{\mathbf{R}}(X)$, так что мы можем построить банахово факторпространство $C_{\mathbf{R}}(X)/I$. При помощи элементарных алгебраических операций ρ «поднимается» до биекции $\tilde{\rho}$: $C_{\mathbf{R}}(X)/I \to \operatorname{Ran}\rho$. Если бы можно было теперь показать, что $\|\tilde{\rho}([f])\|_{C_{\mathbf{R}}(Y)} = \|[f]\|_{C_{\mathbf{R}}(X)/I}$, то $\operatorname{Ran}\rho$ будет банаховым пространством и, следовательно, замкнутой подалгеброй.

Ясно, что $\|\rho(f)\|_{C_{\mathbf{R}}(Y)} \leqslant \|f\|_{C_{\mathbf{R}}(X)}$, поэтому $\|\tilde{\rho}([f])\|_{C_{\mathbf{R}}(Y)} \leqslant \leqslant \|[f]\|_{C_{\mathbf{R}}(X)/I}$. Значит, достаточно показать, что при заданном $g \in \operatorname{Ran}\rho$ мы можем найти такое $f \in C_{\mathbf{R}}(X)$, что $g = \rho(f)$ и $\|g\|_{C_{\mathbf{R}}(Y)} = \|f\|_{C_{\mathbf{R}}(X)}$ (вспомните определение факторнормы!). Так как $g \in \operatorname{Ran}\rho$, то $g = \rho(h_1)$ для некоторого $h_1 \in C_{\mathbf{R}}(X)$. Положим

$$h_2 = \min\{\|g\|_{C_{\mathbf{R}}(Y)}, h_1\};$$

тогда $\rho(h_2) = g$ и $h_2(x) \leqslant \|g\|_{C_{\mathbf{R}}(Y)}$ при всех x. Пусть $h_3 = = \max\{-\|g\|_{C_{\mathbf{R}}(X)}, h_2\}$. Тогда $\|h_3\|_{C_{\mathbf{R}}(X)} = \|g\|_{C_{\mathbf{R}}(Y)}$ и $\rho(h_3) = g$. Это завершает доказательство. ∎

Дополнение к § IV.3. Теорема Стоуна — Вейерштрасса

В этом дополнении мы докажем теорему IV.9 для случая, когда $1 \in B$. Общее доказательство мы оставим в качестве самостоятельного упражнения. Любопытно заметить, что первым шагом будет доказательство классической теоремы Вейерштрасса (которая является частным случаем общей теоремы!).

Лемма 1. Множество всех полиномов плотно в $C_{\mathbf{R}}[a, b]$ при любых конечных вещественных a, b.

Доказательство. См. задачи 19 и 20.

Теперь можно воспользоваться этим результатом и доказать, что B — решетка.

Определение. Подмножество $S \subset C_{\mathbf{R}}(X)$ называется **решеткой**, если для всех $f, g \in S$ нижняя грань $f \wedge g = \min\{f, g\}$ и верхняя грань $f \vee g = \max\{f, g\}$ лежат в S.

Лемма 2. Любая замкнутая подалгебра B из $C_{\mathbf{R}}(X)$, такая, что $1 \in B$, есть решетка.

Доказательство. Покажем, что если $f \in B$, то и $|f| \in B$. Тогда результат будет следовать из формул $f \vee g = \frac{1}{2}|f-g| + \frac{1}{2}|f+g|$, $f \wedge g = -[(-f) \vee (-g)]$. Не теряя общности, допустим, что $\|f\|_\infty \leqslant 1$. По классической теореме Вейерштрасса можно найти последовательность полиномов $P_n(x)$, равномерно сходящуюся к $|x|$ на $[-1, 1]$ и такую, например, что $|P_n(x) - |x|| < 1/n$ для всех $x \in [0, 1]$. Так как $\|f\|_\infty \leqslant 1$, то отсюда следует, что $\|P_n(f) - |f|\|_\infty < 1/n$, т. е. $|f| = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(f)$. Но алгебра B содержит 1, поэтому $P_n(f) \in B$. Поскольку B замкнута, $|f| \in B$. ∎

Наконец, полная теорема Стоуна—Вейерштрасса вытекает из леммы 2 и следующей теоремы, которая интересна и сама по себе:

Теорема IV.12 (теорема Какутани—Крейна). Пусть X — компактное хаусдорфово пространство. Любая решетка $\mathcal{L} \subset C_{\mathbf{R}}(X)$, являющаяся замкнутым подпространством, содержащая 1 и разделяющая точки, совпадает со всем пространством $C_{\mathbf{R}}(X)$.

Доказательство. Пусть $h \in C_{\mathbf{R}}(X)$, и пусть задано некоторое ε. Будем искать такое $f \in \mathcal{L}$, что $\|h - f\| < \varepsilon$. Предположим, что можно показать, что для любого $x \in X$ существует такое $f_x \in \mathcal{L}$, что $f_x(x) = h(x)$ и $h \leqslant f_x + \varepsilon$. Тогда для каждого x найдется его открытая окрестность U_x, такая, что $h(y) \geqslant f_x(y) - \varepsilon$ для всех $y \in U_x$ (в силу непрерывности $h - f_x$). Такие U_x покрывают X, и пусть $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ — некоторое конечное подпокрытие. Тогда $f = f_{x_1} \wedge \ldots \wedge f_{x_m}$ удовлетворяет условию $f(y) + \varepsilon = \min\limits_i \{f_{x_i}(y) + \varepsilon\} \geqslant h(y)$. Более того, так как любой $y \in U_{x_i}$ при некотором i, то $f(y) - \varepsilon \leqslant f_{x_i}(y) - \varepsilon \leqslant h(y)$. Значит, $\|f - h\|_\infty < \varepsilon$.

Остается найти f_x с нужными свойствами. Так как $\mathcal{L}$ разделяет точки и $1 \in \mathcal{L}$, то при любых x и y из X можно найти такую $f_{xy} \in \mathcal{L}$, что $f_{xy}(x) = h(x)$ и $f_{xy}(y) = h(y)$. Для любого y можно найти его открытую окрестность V_y, такую, что $f_{xy}(z) + \varepsilon \geqslant h(z)$ для $z \in V_y$. Из них можно выбрать конечное покрытие $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$. Полагая $f_x = f_{xy_1} \vee \ldots \vee f_{xy_n}$, получаем

$f_x(x)=h(x)$ и для произвольного $z \in X$

$$f_x(z)+\varepsilon=\max_{i=1,\ldots,n}\{f_{xy_i}(z)+\varepsilon\} \geqslant h(z).$$

Это завершает доказательство. ∎

IV.4. Теория меры на компактных пространствах

В этом разделе мы рассмотрим некоторые специальные аспекты теории меры на компактных пространствах. В частности, мы увидим, что сопряженное к $C(X)$ пространство можно интерпретировать как некоторое пространство мер (теорема Рисса — Маркова). Так как доказательства в теории меры по бо́льшей части мало поучительны, мы не станем приводить здесь доказательства всех теорем.

Первый вопрос, который возникает,— как выбрать σ-поле измеримых множеств. Начнем с минимального семейства. Разумеется, мы хотим, чтобы непрерывные функции $f \in C(X)$ были интегрируемы. Это наводит на мысль, что следует считать измеримыми все замкнутые (и открытые) множества, однако в этом нет необходимости.

Определение. G_δ-множество — это множество, являющееся счетным пересечением открытых множеств.

Предложение. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, и пусть $f \in C_{\mathbb{R}}(X)$. Тогда $f^{-1}([a, \infty))$ — компактное G_δ-множество.

Доказательство. Множество $f^{-1}([a, \infty))$ замкнуто и, стало быть, компактно. Так как

$$f^{-1}([a, \infty))=\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((a-1/n, \infty)),$$

то оно есть G_δ-множество. ∎

Итак, для интегрируемости непрерывных функций довольно того, чтобы σ-поле содержало компактные G_δ-множества.

Определение. σ-поле, порождаемое компактными G_δ-множествами в компактном пространстве X, называется семейством **бэровых множеств**. Функции $f: X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), измеримые относительно этого σ-поля, называются **бэровыми функциями**. Мера на бэровых множествах называется **бэровой мерой**, если она еще конечна, т. е. $\mu(X)<\infty$.

Как и в случае конечных интервалов на вещественной прямой и лебеговой меры, имеет место