$f_x(x) = h(x)$ и для произвольного $z \in X$

$$f_x(z) + \varepsilon = \max_{i=1,\ldots,n} \{f_{xy_i}(z) + \varepsilon\} \geqslant h(z).$$

Это завершает доказательство. ∎

IV.4. Теория меры на компактных пространствах

В этом разделе мы рассмотрим некоторые специальные аспекты теории меры на компактных пространствах. В частности, мы увидим, что сопряженное к $C(X)$ пространство можно интерпретировать как некоторое пространство мер (теорема Рисса — Маркова). Так как доказательства в теории меры по бóльшей части мало поучительны, мы не станем приводить здесь доказательства всех теорем.

Первый вопрос, который возникает,— как выбрать σ-поле измеримых множеств. Начнем с минимального семейства. Разумеется, мы хотим, чтобы непрерывные функции $f \in C(X)$ были интегрируемы. Это наводит на мысль, что следует считать измеримыми все замкнутые (и открытые) множества, однако в этом нет необходимости.

Определение. G_δ-множество — это множество, являющееся счетным пересечением открытых множеств.

Предложение. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, и пусть $f \in C_{\mathbb{R}}(X)$. Тогда $f^{-1}([a, \infty))$ — компактное G_δ-множество.

Доказательство. Множество $f^{-1}([a, \infty))$ замкнуто и, стало быть, компактно. Так как

$$f^{-1}([a, \infty)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((a - 1/n, \infty)),$$

то оно есть G_δ-множество. ∎

Итак, для интегрируемости непрерывных функций довольно того, чтобы σ-поле содержало компактные G_δ-множества.

Определение. σ-поле, порождаемое компактными G_δ-множествами в компактном пространстве X, называется семейством **бэровых множеств**. Функции $f: X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), измеримые относительно этого σ-поля, называются **бэровыми функциями**. Мера на бэровых множествах называется **бэровой мерой**, если она еще конечна, т. е. $\mu(X) < \infty$.

Как и в случае конечных интервалов на вещественной прямой и лебеговой меры, имеет место

Теорема IV.13. Если μ — бэрова мера, то $C(X) \subset L^p(X, d\mu)$ при всех p и $C(X)$ плотно в $L^1(X, d\mu)$ и в любом L^p-пространстве с $p < \infty$ (но *не* в L^∞, за исключением патологических случаев, когда $C(X)$ уже есть все L^∞!).

Несмотря на то что бэровы множества — это все, что нам нужно, читателю, несомненно, захочется разделаться с G_δ-множествами и рассматривать все **борелевы** множества, т. е. σ-поле, порождаемое всеми открытыми множествами. На вопрос о расширении бэровых мер до борелевых, т. е. до мер на всех борелевых множествах, отвечают следующие замечания:

(1) Всякая бэрова мера автоматически **регулярна**, т. е.

$$\mu(Y) = \inf \{\mu(O) \mid Y \subset O, \ O \text{ открыты и бэровы}\} = \sup \{\mu(C) \mid C \subset Y, \ C \text{ компактны и бэровы}\}.$$

(2) Вообще говоря, бэрова мера обладает многими расширениями на все борелевы множества, но существует в точности одно регулярное расширение до борелевой меры. Борелева мера называется регулярной, если

$$\mu(Y) = \inf \{\mu(O) \mid Y \subset O, \ O \text{ открыто}\} = \sup \{\mu(C) \mid C \subset Y, \ C \text{ компактно и } \textit{борелево}\}.$$

Итак, существует взаимно однозначное соответствие между бэровыми мерами и *регулярными* борелевыми мерами.

(3) Если μ — борелева мера, то $C(X)$ плотно в $L^1(X, d\mu)$ тогда и только тогда, когда μ регулярна. Если μ регулярна, то всякое борелево множество почти всюду бэрово в том смысле, что для данного борелева множества Y существует бэрово множество $\tilde{Y}$, такое, что

$$\int |\chi_Y - \chi_{\tilde{Y}}| \, d\mu \equiv \mu(Y \setminus \tilde{Y}) + \mu(\tilde{Y} \setminus Y) = 0.$$

К тому же всякая борелева функция после изменения лишь на борелевом множестве меры нуль равна некоторой бэровой функции.

(4) В определенных случаях всякое компактное множество есть G_δ-множество, так что бэровы и борелевы множества совпадают. Так будет в случае, когда X — компактное метрическое пространство (см. задачу 30).

Впредь, говоря о компактных множествах X, мы будем пользоваться термином мера в смысле бэровой (или, что то же самое, регулярной борелевой) меры, если только специально не оговорено другое словоупотребление.

Пусть теперь X компактно, и пусть μ — мера на X. Рассмотрим отображение $C(X) \to \mathbb{C}$, заданное формулой $f \mapsto l_\mu(f) \equiv \int f \, d\mu$.

Очевидно, что l_μ линейно и что

$$|l_\mu(f)| \leqslant \int |f|\, d\mu \leqslant \|f\|_\infty \mu(X),$$

так что l_μ есть непрерывный линейный функционал на $C(X)$. Фактически $\|l_\mu\|_{C(X)^*} = \mu(X)$, что сразу видно, если взять $f=1$. Более того, l_μ положителен в смысле следующего определения.

Определение. **Положительный линейный функционал** на $C(X)$ есть (a priori не обязательно непрерывный) линейный функционал l, такой, что $l(f) \geqslant 0$ для всех поточечно неотрицательных f.

Положительные линейные функционалы в более общем случае появятся при изучении C^*-алгебр; см. гл. XVII. Они обладают следующим приятным свойством (другие свойства, к которым ведет положительность, см. в задаче 37).

Предложение. Пусть l — положительный линейный функционал. Тогда l непрерывен и $\|l\|_{C(X)^*} = l(1)$.

Доказательство. Допустим сначала, что f вещественна. Так как $-\|f\|_\infty \leqslant f \leqslant \|f\|_\infty$, то $-l(1)\|f\|_\infty \leqslant l(f) \leqslant l(1)\|f\|_\infty$; значит, $|l(f)| \leqslant \|f\|_\infty l(1)$. Если f произвольна, то $l(f) = e^{i\varphi} r$, причем r вещественно и положительно. Отсюда

$$|l(f)| = l(\operatorname{Re}[e^{-i\varphi} f]) \leqslant \|\operatorname{Re}(e^{-i\varphi} f)\|_\infty l(1) \leqslant l(1)\|f\|_\infty. \blacksquare$$

Мы видели, что любая бэрова мера дает пример положительного линейного функционала на $C(X)$; следующая теорема говорит, что иных и не бывает.

Теорема IV.14 (теорема Рисса—Маркова). Пусть X — компактное хаусдорфово пространство. Всякому положительному линейному функционалу l на $C(X)$ отвечает единственная бэрова мера μ на X, такая, что

$$l(f) = \int f\, d\mu.$$

Мы не хотим давать подробное доказательство, но давайте просто посмотрим, как μ может быть восстановлена по данному l_μ. Подобный же процесс позволяет строить меру исходя из любого положительного линейного функционала, даже если мы не знаем наперед, что он имеет вид l_μ. Так как μ внутренне регулярна (т. е. $\mu(Y) = \sup\{\mu(C) \mid C \subset Y,\ C \text{ компактно}\}$), то, чтобы «восстановить» μ, мы должны лишь найти $\mu(C)$ для компактных C. Мы утверждаем, что $\mu(C) = \inf\{l_\mu(f) \mid f \in C(X),\ f \geqslant \chi_C\}$. Поскольку μ положительна, очевидно, что $\mu(C) \leqslant l_\mu(f)$, если $f \geqslant \chi_C$; значит, достаточно показать, что при данном ε можно найти такое $f \in C(X)$, что $\chi_C \leqslant f$ и $l_\mu(f) \leqslant \mu(C) + \varepsilon$. Поскольку μ внешне регулярна, то при данном ε можно найти такое открытое O, что $\mu(O\setminus C)<\varepsilon$ и $C\subset O$. По лемме Урысона найдется такая $f\in C(X)$, что $0\leqslant f\leqslant 1$, $f(x)=1$, если $x\in C$, и $f(x)=0$, если $x\in X\setminus O$. Следовательно, $l(f)\leqslant\mu(O)<\mu(C)+\varepsilon$. Так мы убедились, что μ может быть восстановлена исходя из l_μ, и потому не слишком удивительно, что из любого l можно построить некоторую меру.

Теорема Рисса—Маркова—это обычный путь, на котором в функциональном анализе возникают меры. Например, мы уже свыклись с тем, что меры на $\mathbb{R}$ ассоциируются с квантовомеханическими гамильтонианами, а эти последние в свою очередь получаются из некоторых положительных линейных функций при посредстве теоремы Рисса—Маркова (или, точнее, ее расширения на локально компактные пространства, которое мы вскоре обсудим).

В общем случае поточечный предел направленности бэровых функций не является ни бэровой, ни даже борелевой функцией (задача 13). Однако если $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ есть направленность непрерывных функций, возрастающая в том смысле, что $f_\alpha\geqslant f_\beta$, коль скоро $\alpha>\beta$, то $f=\lim\limits_\alpha f_\alpha=\sup\limits_\alpha f_\alpha$ есть борелева функция, поскольку множество

$$f^{-1}[(a,\ \infty)]=\bigcup_\alpha f_\alpha^{-1}[(a,\ \infty)]$$

открыто. Теорема о монотонной сходимости имеет следующее обобщение на направленности:

Теорема IV.15 (теорема о монотонной сходимости направленностей). Пусть μ—регулярная борелева мера на компактном хаусдорфовом пространстве X. Пусть $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$—возрастающая направленность непрерывных функций. Тогда $f=\lim\limits_\alpha f_\alpha\in L^1(X,\ d\mu)$ в том и только том случае, когда $\sup\limits_\alpha\|f_\alpha\|_1<\infty$, и в этом случае $\lim\limits_\alpha\|f-f_\alpha\|_1=0$.

Прежде чем расстаться с теорией меры на компактных пространствах, найдем сопряженное к $C(X)$. Разумеется, не всякий непрерывный линейный функционал на $C(X)$ положителен, но важный результат, к которому мы сейчас идем, состоит в том, что любой $l\in C_{\mathbb{R}}(X)^*$ есть разность двух положительных линейных функционалов. В основе этого факта лежит простой результат «теории решеток», относящийся к $C_{\mathbb{R}}(X)$.

Лемма. Пусть $f,\ g\in C_{\mathbb{R}}(X)$ и $f,\ g\geqslant 0$. Предположим, что $h\in C_{\mathbb{R}}(X)$ и $0\leqslant h\leqslant f+g$. Тогда справедливо представление $h=h_1+h_2$, в котором $0\leqslant h_1\leqslant f$ и $0\leqslant h_2\leqslant g$, $h_1,\ h_2\in C_{\mathbb{R}}(X)$.

Доказательство. Пусть $h_1=\min\{f, h\}$. Тогда $0\leqslant h_1\leqslant f$, и если $h_2\equiv h-h_1$, то $h_2\geqslant 0$. Более того, если $h_1(x)=h(x)$, то $h_2(x)=0\leqslant g(x)$, а если $h_1(x)=f(x)$, то $h_2(x)=h(x)-f(x)\leqslant f(x)+g(x)-f(x)=g(x)$, так что $h_2\leqslant g$. ∎

Теорема IV.16. Пусть $l\in C_{\mathbb{R}}(X)^*$. Тогда l можно представить в виде $l=l_+-l_-$, где l_+ и l_- — положительные линейные функционалы. Более того, $l_+(1)+l_-(1)=\|l\|$ и l_+, l_- тем самым однозначно определены.

Доказательство. Для $f\in C(X)_+\equiv\{f\in C(X)\mid f\geqslant 0\}$ положим $l_+(f)=\sup\{l(h)\mid h\in C(X);\ 0\leqslant h\leqslant f\}$. Так как $|l(h)|\leqslant\|l\|\|h\|_\infty\leqslant\|l\|\|f\|_\infty$, то эта верхняя грань конечна. Очевидно, $l_+(tf)=tl_+(f)$ при любом $t>0$ и $l_+(f)\geqslant l(0)=0$ для всех $f\in C(X)_+$. Пусть $f, g\in C(X)_+$. Тогда по лемме

$$\begin{aligned}l_+(f+g)&=\sup\{l(h)\mid 0\leqslant h\leqslant f+g\}=\\&=\sup\{l(h_1)+l(h_2)\mid 0\leqslant h_1\leqslant f,\ 0\leqslant h_2\leqslant g\}=\\&=l_+(f)+l_+(g).\end{aligned}$$

Для любого $f\in C(X)$ положим $f_+=\max\{f, 0\}$ и $f_-=-\min\{f, 0\}$, так что $f=f_+-f_-$. Пусть $l_+(f)=l_+(f_+)-l_+(f_-)$. Легко показать, что l_+ линеен на $C(X)$. По определению $l_+(f)\geqslant l(f)$, если $f\geqslant 0$, так что $l_-(f)\equiv l_+(f)-l(f)$ — положительный линейный функционал. Итак, мы записали l в виде разности положительных линейных функционалов: $l=l_+-l_-$.

Докажем теперь, что $l_+(1)+l_-(1)=\|l\|$. Сначала заметим, что $\|l\|\leqslant\|l_+\|+\|l_-\|=l_+(1)+l_-(1)$. Чтобы получить противоположное неравенство, перепишем l_- симметрично относительно l_+. Для $f\geqslant 0$

$$\begin{aligned}l_-(f)&=\sup\{l(h)-l(f)\mid 0\leqslant h\leqslant f\}=\\&=\sup\{l(k)\mid -f\leqslant k\leqslant 0\},\end{aligned}$$

где $k=h-f$. Следовательно,

$$\begin{aligned}l_+(1)-l_-(1)&=\sup\{l(h)\mid 0\leqslant h\leqslant 1\}+\sup\{l(k)\mid -1\leqslant k\leqslant 0\}=\\&=\sup\{l(g)\mid -1\leqslant g\leqslant 1\}\leqslant\\&\leqslant\|l\|\sup\{\|g\|_\infty\mid -1\leqslant g\leqslant 1\}=\|l\|.\end{aligned}$$

Доказательство единственности мы оставляем читателю (задача 31). ∎

Определение. **Комплексная бэрова мера есть конечная линейная комбинация бэровых мер с комплексными коэффициентами.**

Вот простое следствие теорем IV.14 и IV.16:

Теорема IV.17. Пусть X — компактное пространство. Тогда $C(X)^*$ (сопряженное к $C(X)$) есть пространство всех комплексных мер Бэра.

Определение. Будем писать $\mathscr{M}(X)=C(X)^*$, $\mathscr{M}_+(X)=\{l\in\mathscr{M}(X)\mid l$ — положительный линейный функционал$\}$ и $\mathscr{M}_{+,1}(X)=\{l\in\mathscr{M}_+(X)\mid \|l\|=1\}$.

В ряде случаев полезно представлять себе меры не просто как индивидуальные объекты, но, напротив, как элементы $\mathscr{M}(X)$. Чтобы дать читателю представление о такого рода рассуждениях, мы закончим наше обсуждение пространства $\mathscr{M}(X)$ простой теоремой о выпуклости.

Определение. Множество A в векторном пространстве Y называется **выпуклым**, если из $x\in A$, $y\in A$ и $0\leqslant t\leqslant 1$ следует, что $tx+(1-t)y\in A$. Иными словами, A выпукло, если отрезок прямой между x и y принадлежит A, коль скоро x и y принадлежат A (рис. IV.1). Множество A называется **конусом**, если из

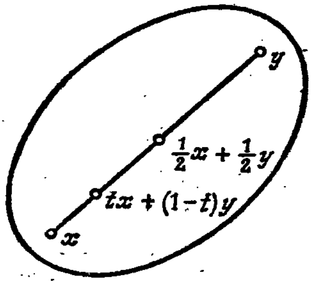

Рис. IV.1. Выпуклое множество.

$x\in A$ следует, что $tx\in A$ при всех $t>0$. Если A выпукло и представляет собой конус, то оно называется **выпуклым конусом**.

Предложение. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство. Тогда $\mathscr{M}_{+,1}(X)$ выпукло, а $\mathscr{M}_+(X)$ — выпуклый конус.

Доказательство. Выпуклая комбинация положительных линейных функционалов есть, очевидно, положительный линейный функционал. Более того, $\|l\|=l(1)$, если l — положительный линейный функционал, так что $\|tl_1+(1-t)l_2\|=1$, если l_1, $l_2\in\mathscr{M}_{+,1}$. ∎

На первый взгляд этот геометрический факт может показаться несколько странным, потому что читатель привык представлять себе единичную сферу $\{x\mid \|x\|=1\}$ «круглой», а здесь утверждается, что целый ее кусок — совершенно плоский! Суть дела в том, что не всякая норма — евклидова (из закона параллелограмма следует, что в гильбертовом пространстве если $\|x\|=\|y\|=1$ и $x \neq y$, то $\|tx+(1-t)y\|<1$). На самом деле в $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|\langle x_1, \ldots, x_n\rangle\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ единичная сфера имеет плоские грани (см. рис. IV.2). Это не случайное совпадение;

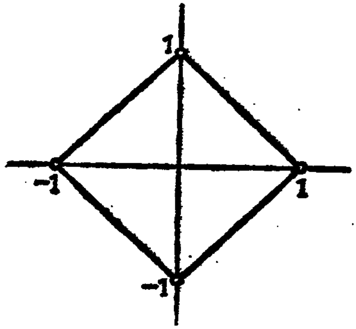

Рис. IV.2. Единичная сфера в $\mathbb{R}^2$, когда $\|\langle x, y\rangle\| = |x|+|y|$.

$\{1, \ldots, n\}$ есть компактное множество в дискретной топологии, а $\mathbb{R}^n$ с рассмотренной нормой есть в точности $\mathcal{M}(\{1, \ldots, n\})$.

Теперь мы хотим распространить «топологическую теорию меры» на более широкий класс пространств.

Определение. Топологическое пространство X называется **локально компактным**, если всякая точка $p \in X$ имеет компактную окрестность.

Из сравнения с мерой Лебега на $\mathbb{R}$ становится понятно, что надо ослабить условие $\mu(X) < \infty$, которое накладывалось для компактных X. Сначала определим бэровы множества в локально компактном пространстве X как σ-кольцо, порождаемое компактными G_δ-множествами. Заметим, что, вообще говоря, само X может не быть множеством из $\mathcal{B}$. Однако если X σ-компактно, т. е. является счетным объединением компактных множеств, то $X \in \mathcal{B}$.

Определение. **Мера Бэра** на локально компактном пространстве X есть такая мера на бэровых множествах, что $\mu(C) < \infty$ для любого компактного бэрова множества C.

Если заданы мера Бэра μ на X и компактное G_δ-множество $C \subset X$, то существует индуцированная сужением мера Бэра μ_C на C. Обратно, легко видеть, что семейство мер $\{\mu_C\}$, по одной для каждого G_δ-множества, обладающих тем свойством, что $\mu_C(Y) = \mu_D(Y)$, если $Y \subset C \cap D$, определяет меру Бэра. Эти наводящие соображения позволяют доказывать теоремы для локально компактного случая, опираясь на аналогию с компактным случаем.

Определение. Пусть X — локально компактное пространство. Алгебра $\varkappa(X)$ **непрерывных функций с компактным носителем** есть множество функций, исчезающих вне некоторого компактного множества (вообще говоря, своего для каждой функции). Алгебра $C_\infty(X)$ непрерывных функций, исчезающих на ∞, есть множество функций $f \in C(X)$, обладающих тем свойством, что при любом $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $D_\varepsilon \subset X$, такое, что $|f(x)| < \varepsilon$, если $x \notin D_\varepsilon$. Таким образом,

$$\varkappa(X) \subset C_\infty(X) \subset C(X).$$

Из теоремы IV.14 следует

Теорема IV.18 (теорема Рисса — Маркова). Пусть X — локально компактное пространство. Положительный линейный функционал на $\varkappa(X)$ имеет вид $l(f) = \int f\,d\mu$ с некоторой мерой Бэра μ. Положительные линейные функционалы на $C_\infty(X)$ порождаются мерами μ с конечной полной массой, т. е. $\sup\limits_{A \in \mathscr{B}} \mu(A) < \infty$.

В следующей главе мы найдем топологию на $\varkappa(X)$, в которой сопряженное к $\varkappa(X)$ будет в точности пространством комплексных бэровых мер. Заметим, что эта топология *не* задается нормой $\|\cdot\|_\infty$. Пространство $\varkappa(X)$ не полно по норме $\|\cdot\|_\infty$; его пополнением будет $C_\infty(X)$, а его сопряженным по норме $\|\cdot\|_\infty$ — пространство *конечных* мер.

IV.5. Слабые топологии на банаховых пространствах

Определение. Пусть X — банахово пространство и X^* — его сопряженное. **Слабой топологией** на X называется слабейшая топология на X, в которой непрерывен каждый функционал l из X^*.

Таким образом, база окрестностей нуля для слабой топологии задается множествами вида

$$N(l_1, \ldots, l_n; \varepsilon) = \{x \mid |l_i(x)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\},$$

т. е. окрестности нуля содержат цилиндры с конечномерными открытыми основаниями. Направленность $\{x_\alpha\}$ слабо сходится к x (записывается $x_\alpha \xrightarrow{w} x$) тогда и только тогда, когда $l(x_\alpha) \to l(x)$ для всех $l \in X^*$.

В бесконечномерных банаховых пространствах слабая топология не порождается никакой метрикой. Это одна из главных